SAL. OPPENHEIM
Privatbankiers seit 1789

Trading & Derivatives

Zertifikatestrukturen mit exotischen Optionen

Aus der Sicht des Derivatehandels…

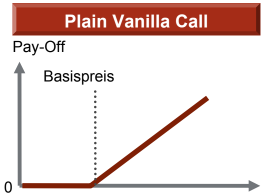
Stephan Krügel
Invest Stuttgart, 11. – 13. April 2008

INHALT

1. Plain Vanilla Optionen

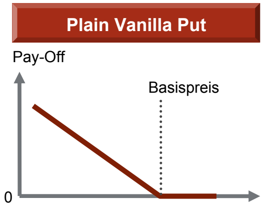
Optionstypen

Als Plain Vanilla Optionen bezeichnet man alle „konventionellen“ Optionskontrakte:



Call Optionen
Bedingtes Termingeschäft: Recht aber nicht die Pflicht, das Basisinstrument
a) bei Laufzeitende (european style)
b) während der Laufzeit (american style)
zu einem vorher definierten Preis, dem Basispreis, erwerben zu können.

$$C_T = \max[S_T - K; 0]$$

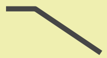


Put Optionen
Bedingtes Termingeschäft: Recht aber nicht die Pflicht, das Basisinstrument
a) bei Laufzeitende (european style)
b) während der Laufzeit (american style)
zu einem vorher definierten Preis, dem Basispreis, andienen zu können.

$$P_T = \max[K - S_T; 0]$$

Positionierungsmöglichkeiten

Käufer einer Option: long Position
Verkäufer („Schreiber“) einer Option: short Position

	long Call	long Put	short Call	short Put
Verlustpotenzial	Prämienzahlung	Prämienzahlung	unbegrenzt	unbegrenzt (korrekt: maximal gleich Basispreis)
Ertragspotenzial	unbegrenzt	unbegrenzt (korrekt: maximal gleich Basispreis)	Prämienzahlung	Prämienzahlung
Risiko	überschaubar	überschaubar	hoch	hoch
Payoff				
	$\max[S_T - K;0]$	$\max[K - S_T;0]$	$-\max[S_T - K;0]$	$-\max[K - S_T;0]$

Drei Wertigkeitszustände einer Plain Vanilla Option

Im Geld, am Geld, aus dem Geld…Aussage über den Wert, wenn man augenblicklich ausüben würde.

		Call auf DBK, Basispreis 70€	Put auf DBK, Basispreis 70€
ITM	in-the-money	DBK notiert über 70€	DBK notiert unter70€
ATM	at-the-money	DBK notiert bei 70€	DBK notiert bei 70€
OTM	out-of-the-money	DBK notiert unter70€	DBK notiert über 70€

Der Begriff der „Moneyness“…
„Die Option ist 20% in-the-money“ o.ä. meist bezogen auf:

$$\text{Moneyness} = \ln \frac{K}{S}$$

Innerer Wert und Zeitwert einer Option

Der innere Wert einer Option entspicht dem Auszahlungsbetrag, den man bei sofortiger Ausübung erhalten würde. Gleichzeitig Wertuntergrenze für american style Optionen.

Innerer Wert Call = Aktienkurs – Basispreis
Innerer Wert Put = Basispreis - Aktienkurs

INNERER WERT + **ZEIT-WERT** = **OPTIONS-PREIS**

Black-Scholes-Merton Bewertungsmodell

Die Bewertung von Plain Vanilla Option

Handwerkszeug: Ein Bewertungsmodell
Einfachste Variante: Black-Scholes-Merton
Ziel: Bewertung von europäischen Calls und Puts auf dividendenfreie Aktien

__Bestimmung eines fairen Wertes
__Fairer Wert: Der erwartete Ertrag des Geschäftes ist sowohl für den Käufer als auch den Verkäufer gleich Null
__Grundgedanke: Der Payoff einer europäischen Option kann durch ein stetig umgeschichtetes Portfolio aus Aktie und Nullkuponanleihe (oder Geldmarktkonto => risikoloser Zins) dupliziert werden

→ Der Preis der Option entspricht den Kosten der Hedgingstrategie

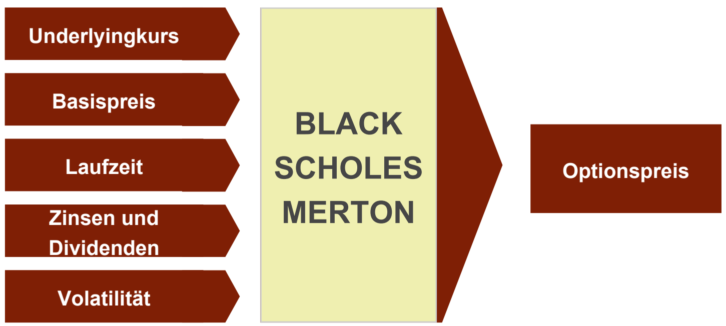
Black-Scholes-Merton Modell: Wichtigste Prämissen

__Der Kurs des Basisinstruments folgt einem, der kein Gedächtnis hat (Ito-Prozeß). Vergangene Informationen sind im Preis enthalten und deshalb irrelevant.
__Der Kurs des Basisinstruments folgt einer Geometrischen Brownschen Bewegung und ist damit lognormalverteilt. Renditen sind normalverteilt.
__Friktionslose Märkte (keine Transaktionskosten, beliebig große Stückzahlen handelbar etc.).
__Der risikolose Zins ist jederzeit bekannt und bleibt bis Laufzeitende konstant.
__Die Volatilität des Basisinstruments ist jederzeit bekannt und bleibt bis Laufzeitende konstant.

Nimmt man das ernst, dann gilt:
Delta-Hedging als kontinuierliche Hedgingstrategie in stetiger Zeit funktioniert.

Das Black-Scholes-Merton Modell

Input/Output:



Volatilität als einzige Unbekannte…

Der einzige unbekannte Inputparameter ist die Volatilität.

Welche Volatilität ist das? Mit Volatilität ist die tatsächlich realisierte Schwankungsbreite des Underlyings bis Laufzeitende gemeint: Die **realisierte Volatilität (σ)** im Sinne von Standardabweichung. Oft auch „historische" Volatilität genannt.

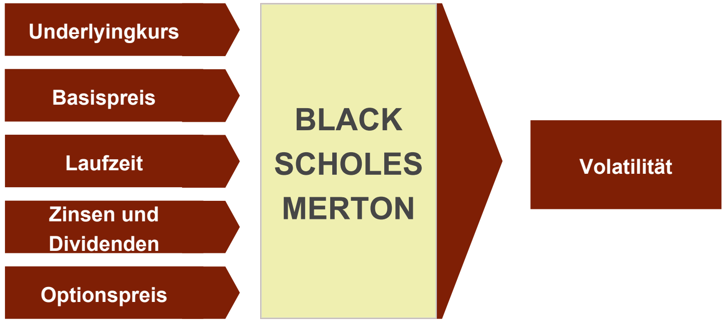
Diese Maßzahl kennt man allerdings frühestens **bei Laufzeitende**. Es bleibt, die Volatilität zu schätzen, um einen Optionspreis zu erhalten. Aber muss man das wirklich tun?

In vielen Fällen stehen nämlich handelbare Bid-Ask Quotes für Optionen zur Verfügung, z.B. an der EUREX. Der Marktpreis der Option ist auf diesem Marktplatz hier bekannt, man kann mit Näherungsverfahren (Intervallschachtelung, Newton-Raphson) nach der handelbaren **„impliziten" Black- Scholes Volatilität ($\sigma_{implied}$)** auflösen.

Extremer Standpunkt: **Alle Marktpreise von Optionen sind korrekt.** Alleine Angebot und Nachfrage entscheiden. Und deshalb sollten auch nur die in den Preisen enthaltenen Informationen genützt werden, um Optionen – vor allem komplexere Optionen - zu bepreisen.

Das Black-Scholes-Merton Modell: Rolle der Volatilität

Ist der Optionspreis gegeben, lässt sich die „implizite“ Volatilität errechnen…



Volatilität als einzige Unbekannte…

Die Höhe der impliziten Volatilität ergibt sich am Optionsmarkt durch Angebot und Nachfrage.

Bei der Kauf- bzw. Verkaufsentscheidung einer Position kennen wir die vom BSM-Modell geforderte Volatilität (nämlich die, die bis Laufzeitende realisiert wird) nicht.

Also gilt: Verschiedene Marktteilnehmer verfolgen a) unterschiedliche Ziele und haben b) unterschiedliche Volatilitätseinschätzungen.

__Unternehmen: Hedging
__Fonds: Typische Call-Overwriter
__Derivateabteilungen in Banken, Hedge-Funds: Volatility Trading
__Spekulanten: Umsetzung von Marktmeinungen

Volatilität wird durch Angebot und Nachfrage bestimmt

OPTIONS GERMANY

BAS | Expiry dates | All | Settings

ALT | BAS | BAY | BMW | CBK | CON | DCX | DBK | DB1 | LHA | DPW | DTE | EOA | FME | HEN3 | HR

m	m	a	Exp.date	O. volum	Last	S	b#	Bid	M	Theor.	M	Ask	a#	S	Delta	Vega	Act.Vol	mb	
		a	2007-07-20							14.956					0.97	0.02	25.4		G 78 S
		a	2007-07-20							13.027					0.95	0.03	24.4		G 80 S
m	m	a	2007-07-20							11.130					0.93	0.04	23.6		G 82 S
m	m	a	2007-07-20							9.303					0.89	0.06	22.8		G 84 S
m	m	a	2007-07-20				0	7.420		7.562		7.650	0		0.83	0.09	22.1		G 86 S
m	m	a	2007-07-20				0	5.830		5.957		6.040	0		0.76	0.10	21.6		G 88 S
m	m	a	2007-07-20				0	4.410		4.521		4.600	0		0.67	0.12	21.1		G 90 S
m	m	a	2007-07-20	62	3.190		0	3.210		3.290		3.360	0		0.57	0.13	20.7		G 92 S
m	m	a	2007-07-20	20	2.540		0	2.200		2.295		2.350	0		0.46	0.13	20.4		G 94 S
m	m	a	2007-07-20	11	1.700		0	1.460		1.525		1.580	0		0.35	0.12	20.3		G 96 S
m	m	a	2007-07-20	83	0.960		0	0.920		0.978		1.020	0		0.26	0.11	20.2		G 98 S
		a	2007-07-20				0	0.560		0.602		0.650	0		0.18	0.09	20.2		G 100 S
m	m	a	2007-08-17							13.483					0.92	0.06	24.0		H 80 T
m	m	a	2007-08-17							11.672					0.89	0.08	23.3		H 82 T
m	m	a	2007-08-17							9.927					0.84	0.09	22.8		H 84 T
m	m	a	2007-08-17				0	8.160		8.297		8.390	0		0.79	0.12	22.2		H 86 T
m	m	a	2007-08-17				0	6.650		6.773		6.870	0		0.73	0.14	21.8		H 88 T

Black-Scholes-Merton: Qualität und Praxistauglichkeit

In der Black-Scholes-Merton Welt ist der berechnete Optionspreis ein hinsichtlich der Qualität guter Preis, wenn man die Volatilität kennt. Denn man kann die Option problemlos durch eine dynamische Anpassungsstrategie im Underlying replizieren (Delta-Hedging).

Ist der Black-Scholes-Merton Preis in der realen Welt ein Modell, das ohne weiteres in der Praxis eingesetzt werden kann?

Nein. Denn die Annahmen sind fast ausnahmslos nicht haltbar.
Aber: Das Modell ist robust und hat wenige Variablen.
Für den, der um die Schwächen des Modells weiß, kann das Modell wertvolle Informationen preisgeben. Verwendet werden kann es allerdings nicht mit der eigentlichen Intention…

Kein Marktteilnehmer „glaubt“ an Black-Scholes-Merton. Alle Marktteilnehmer „**ver**wenden“ Black-Scholes-Merton.

Das Black-Scholes-Merton Modell: Die BSM-Formel

Eingabeparameter:

C_t: Preis der europäischen Call Option zum Zeitpunkt t
P_t: Preis der europäischen Put Option zum Zeitpunkt t
S_t: Kurs des Basisinstruments zum Zeitpunkt t
T: Laufzeitende der Option
t: aktueller Zeitpunkt
T-t: Restlaufzeit der Option
K: Basispreis der Option
σ: konstante Volatilität des Basisinstruments bis Laufzeitende
r: risikoloser Zins

Preis einer europäischen Call oder Put Option zum Zeitpunkt t

$$C(S,t) = S_t \times N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \times N(d_2)$$
$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)} \times N(-d_2) - S_t \times N(-d_1)$$

N(x) ist der Wert der Standardnormalverteilung an der Stelle x. Gesucht wird deren Wert an den Stellen d1 und d2:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Ausgangspunkt Gleichgewichtsbewertung

Zur Rekapitulation noch einmal die BSM-Formel:

$$C(S,t) = S_t \times N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \times N(d_2)$$

Nehmen wir eine Volatilität von Null an, so bedeutet das, dass sich der Aktienkurs bis Laufzeitende nicht mehr bewegen wird. Mit anderen Worten: Wir kennen den Kurs des Basisinstruments bei Fälligkeit, der Kurs ist „sicher“, die Option „risikolos“.
Unter diesen Umständen reduziert sich die BSM-Formel für den europäischen Call auf dessen diskontierten inneren Wert:

$$C(S,t) = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Aber: Kurs bei Fälligkeit ist nicht bekannt. Unsicherheit.
Lösung: Den Ausdruck mit Gewichten versehen, mit denen ein statistisch gewichteter Durchschnittswert des wahrscheinlichen Endwertes der Option ermittelt werden kann.
Jeder mögliche Wert des Aktienkurses bei Fälligkeit S_T erhält eine Eintrittswahrscheinlichkeit zugewiesen und ein Gewicht ermittelt.
Optionswert entspricht also dem Erwartungswert von $\max\left[S_T - Ke^{-r(T-t)};0\right]$.

Die Idee des risikolosen Hedge-Portfolios

Replikation des Payoffs einer Option durch eine dynamische Handelsstrategie mit Aktien und Nullkuponanleihen („Delta-Hedging“)

Preis aus dem BSM-Modell muss dem Preis des Replikationsportfolios entsprechen.
Beide Strategien sind homogen und deshalb vom selben Wert; eine Option kann also synthetisch hergestellt werden.

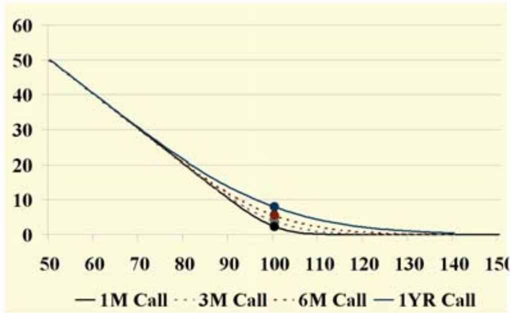
__Payoff einer Option kann durch eine während der Laufzeit ständig aufrecht erhaltene, auf Kredit finanzierte gegensätzliche Position in Aktien dynamisch so abgesichert werden, dass der Wert des Arbitrageportfolios zu jedem Zeitpunkt konstant und von den Aktienkursbewegungen unabhängig ist. Das Duplikationsportfolio ist also ein risikoloses Arbitrageportfolio.
__Option kann durch eine dynamische Position in Aktien und Nullkuponanleihen synthetisch hergestellt werden („Delta-Hedging“).

Griechen und Delta-Hedging

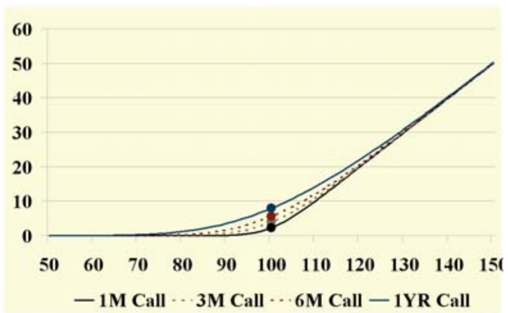
Die Preisfunktion und die Berechnung von Sensitivitätskennzahlen

Die Preisfunktion einer Plain Vanilla Option ist für den Käufer konvex: Zeichen der Optionalität.
Die Steigung der Preisfunktion ändert sich von Punkt zu Punkt.
Sensitivitätskennzahlen helfen in der Praxis bei der Replikation des Payoffs.
Delta, Gamma, Theta, Vega.

Preis des Put vs. Spot



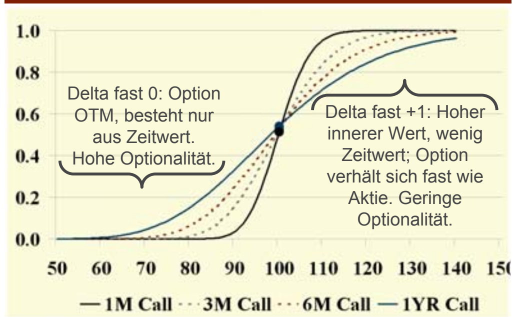
Preis des Call vs. Spot



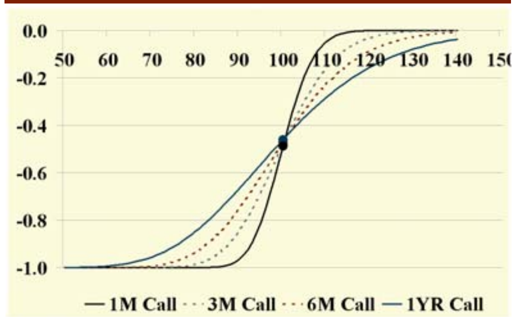
Das Delta (Δ)

„Um wie viele Geldeinheiten ändert sich der Optionskurs, wenn sich das Basisinstrument um eine Geldeinheit bewegt?"
__Erste Ableitung der Optionspreisfunktion nach dem Kurs des Basisinstruments; Steigung der Optionspreisfunktion
__Bandbreite beim Call: 0 bis +1 / Bandbreite beim Put: -1 bis 0

Delta des Call vs. Spot



Delta des Put vs. Spot



Delta-Hedging

„Hedging" = Absichern von Positionen
„Delta-Hedging" = Absichern einer Optionsposition gegen Änderungen im Kurs des Basisinstruments

Sie haben 100 Call Optionen (1 Optionskontrakt) gekauft. Die Optionen haben ein Delta von +50%.
Wie stellt man diese Positionen Delta-neutral?

Das Delta besagt, dass die Option die Bewegung der Aktie um 50% nachvollzieht. Die Optionsposition ist gegen Kursbewegungen immunisiert, wenn man 50 Aktien (leer-) verkauft.

Idee von Black-Scholes-Merton:
Ein ständig Delta-neutral gehaltenes Portfolio aus Optionen und einer entsprechenden gegensätzlichen Position in Aktien ist ein risikoloses Portfolio. Der Ertrag dieses risikolosen Portfolios entspricht dem risikolosen Zins.

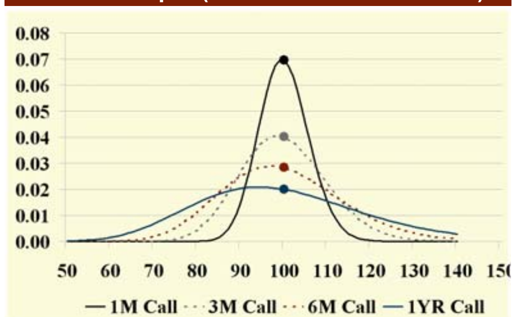
„ständig Delta-neutral" – geht das überhaupt? Nein. Sowohl eine minimale Änderung des Aktienkurs als auch das Verstreichen von Zeit zieht eine Änderung des Deltas nach sich. Die Steigung der Delta-Kurve ist nicht-linear, ein Delta-Hedge funktioniert also nur lokal – das genügt in der BSM-Welt, nicht aber in der Realität.

Deshalb ist Hedging in vielerlei Hinsicht diskret: „Dynamic Hedging"

Das Gamma (Γ)

„Um wie viele Einheiten ändert sich das Delta, wenn sich das Basisinstrument um eine Geldeinheit bewegt?"
__Zweite Ableitung der Optionspreisfunktion nach dem Kurs des Basisinstruments; Steigung des Deltas
__Das Delta ändert sich bereits bei kleinen Änderungen des Aktienkurses => Optionalität bedeutet Konvexität.

Gamma vs. Spot (verschiedene Laufzeiten)



__Indikator für die Hedgingfrequenz: Eine Optionsposition mit hohem Gamma muss häufiger Delta-neutral gestellt werden als eine mit niedrigem Gamma.
__Das Gamma einer Option ist in der Nähe des ATM Punktes am größten.
__Je kürzer die Restlaufzeit einer Option, desto höher das Gamma. Kurzlaufende Optionen sind sehr sensitiv gegenüber Änderungen der Underlyingkurses.
__Sehr kurzlaufende ATM Optionen besitzen ein extrem hohes Gamma. Ursache: Das Delta kurzlaufender Optionen entspricht ungefähr der ITM-Wahrscheinlichkeit. Kleine Aktienkursänderungen in der Gegend um den Basispreis zeigen in dieser Situation große Wirkung.

Dynamisches Delta-Hedging: Einfaches Beispiel

Long Call mit einem Basispreis von 100 GE
Preis 5,00 GE
Delta: 55%
Gamma: 0,02
Theta: -0,01 GE
Annahme: Die Aktie bewegt sich an einem Tag immer genau um eine GE.

Wir werden die Optionsposition nun an 4 Tagen zum jeweiligen Schlußkurs Delta-neutral stellen. Dabei ergeben sich folgende Schlußkurse:

Tag 0	100 GE
Tag 1	101 GE
Tag 2	102 GE
Tag 3	101 GE
Tag 4	100 GE

Dynamisches Delta-Hedging: Einfaches Beispiel

Theta-Kosten
Das Kursniveau von Tag 4 ist mit dem Anfangskurs identisch. Die Option verliert an sich also nur Theta, d.h. den Zeitwert und das sind 4 Cent. Der Optionswert ist dann 4,96 GE.

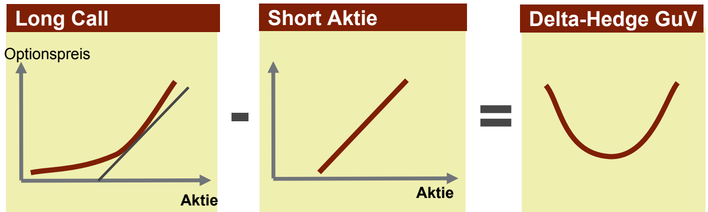
Gamma-Erträge
Das Gamma der Option ist 0,02. Bedeutet:
__Kaufe zum Schlußkurs 0,02 Aktien wenn die Aktie gefallen ist.
__Verkaufe zum Schlußkurs 0,02 Aktien wenn die Aktie gefallen ist.

Tag 0	100€		
Tag 1	101€	Verkaufe 0,02 Aktien	(101-100)*0,02 = +0,02
Tag 2	102€	Verkaufe 0,02 Aktien	(102-100)*0,02 = +0,04
Tag 3	101€	Kaufe 0,02 Aktien	(100-101)*0,02 = -0,02
Tag 4	100€	Kaufe 0,02 Aktien	+/-0

Die Gamma Erträge belaufen sich also auf 0,04 GE.

Dynamisches Delta-Hedging: Volatility Trading

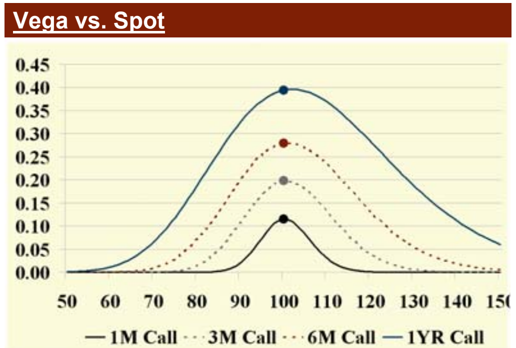
Delta-Hedging macht die Gesamtposition insensitiv gegenüber Aktienkursbewegungen. Der Payoff der Handelsstrategie ist nicht mehr von der Richtung der Aktie abhängig. Es ergibt sich eine quadratische Position in der Veränderung des Aktienkurses. Quadrat bedeutet, positive GuV in beide Richtungen.
Das Quadrat der täglichen relativen Aktienkursveränderungen kann als „realisierte Volatilität" begriffen werden. Dieser Betrag wird mit der Stärke der Krümmung gewichtet – dem Gamma.
Diese bequeme Position kostet natürlich etwas, wenn man long Option ist: Theta. Das Theta determiniert sich mit dem Kauf der Option und dem Ausgeben der Optionsprämie. Die bezahlte Optionsprämie ergibt sich direkt aus der bezahlten Volatilität – der impliziten Volatilität.
In diesem Kontext verdient der Delta-Hedger also Geld, wenn die während der Restlaufzeit realisierte Volatilität (quadrierte Tagesrendite) größer ist als die bezahlte implizite Volatilität.

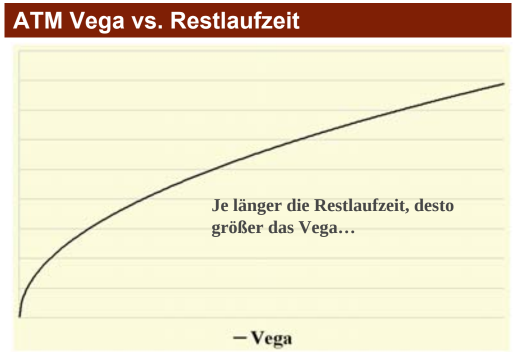


$$\text{GuV} = \frac{1}{2}\Gamma S^2\left[\underbrace{\left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2}_{\text{Realisierte Volatilität}} - \underbrace{\sigma^2_{\text{implied}}}_{\text{Implizite Volatilität}} \times \Delta t\right]$$

Das Vega (Λ)

„Um wie viele Einheiten ändert sich der Optionspreis, wenn sich die implizite Volatilität um eine Einheit bewegt?"
__Optionen mit langer Laufzeit reagieren sensibler auf Änderungen der Volatilität als kurz laufende.
__Das Vega ist nahe ATM am größten.





Das Volatility Surface

Verletzung der Black-Scholes-Merton Prämissen

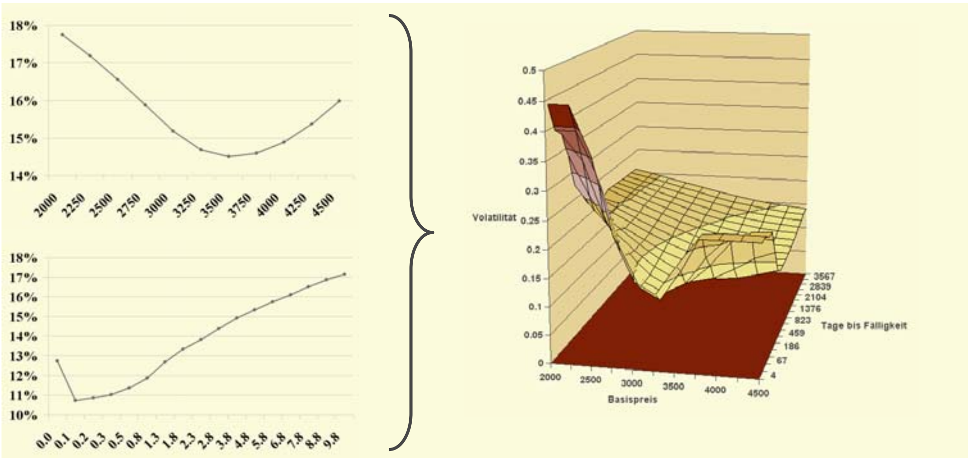
Das Volatility Surface: Skew und Term Structure Effekt

Es existieren viele Optionen mit unterschiedlichen Basispreisen und Laufzeiten...

__Das Volatility Surface ist eine dreidimensionale Darstellung der Optionsvolatilitäten über alle Basispreise (**Skew Effekt**) und Laufzeiten (**Term Structure Effekt**).
__Volatility Skew bedeutet, dass Optionen derselben Laufzeit mit unterschiedlichen Basispreis mit einer eigenen Volatilität bepreist werden.
__Aus der Term Structure of Volatility geht hervor, dass Optionen gleichen Basispreises verschiedener Laufzeit mit unterschiedlichen Volatilitäten bepreist werden.
__Nicht-flache Volatility Surfaces werden seit dem Börsenkrach vom Oktober 1987 beobachtet. Zuvor: Flache Volatilitätsoberfläche.

Volatility Surface: Verletzung der Black-Scholes-Merton Prämissen

Volatility Skew + Term Structure of Volatility = Volatility Surface



Flache Volatilitätsoberfläche vor 1987 – Macht das überhaupt Sinn?

Betrachtet man historische Aktienmarktentwicklungen, z.B. in Form einer Häufigkeitsverteilung von realisierten Tagesrenditen verschiedener Aktien oder auch Aktienindizes, so wird klar, dass ein Aktieninvestment verschiedenen Risiken ausgesetzt ist, z.B.:

Schiefe Risiko: Unterdurchschnittliche Renditen treten am Aktienmarkt häufiger auf als überdurchschnittliche. Die durchschnittliche Rendite ist leicht positiv.
Kurtosis Risiko: Extreme Kursbewegungen kommen wesentlich häufiger vor als von der Normalverteilung unterstellt wird.
Nicht-Stationarität der Verteilungsparameter: Alle Verteilungsparameter ändern sich im Zeitablauf. Volatilität ist beispielsweise selber volatil.

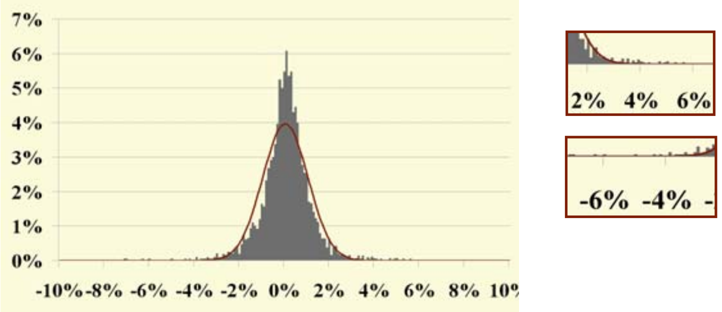
Außerdem:
Kursrückgänge verlagern die Moneyness der Optionen. Far-OTM Optionen sind plötzlich am Geld und weisen ein wesentlich höheres Gamma auf. Diese Optionen müssen nun vom Market-Maker häufiger Delta-neutral gestellt werden. Das bedeutet, dass für vergleichsweise kleine Theta-Erträge hohe short Gamma getriebene Verluste anfallen.

Volatility Surface: Verletzung der Black-Scholes-Merton Prämissen

Gründe für den Volatility Skew: Historische Renditeverteilungen

Empirie: Dicke Enden, höheres Hoch.
Mehr extreme Renditeausschläge, mehr durchschnittliche Renditen als „normal“.

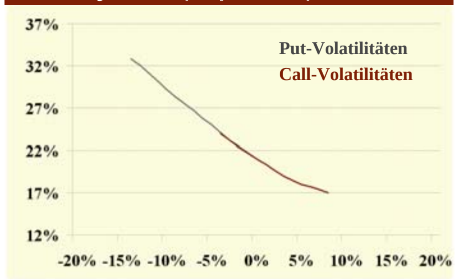
Renditeverteilung eines Aktienindex



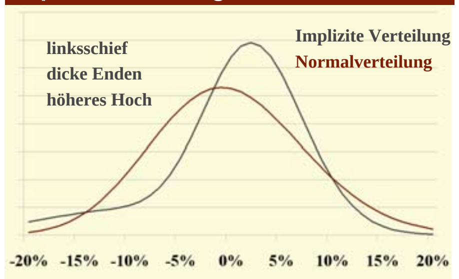
Implizite Wahrscheinlichkeiten & Verteilungen

Aus einem Volatility Skew (bzw. den zugrundliegenden Optionspreisen) lässt sich die vom Markt erwartete terminale risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsverteilung des Aktienkurses der betrachteten Laufzeit extrahieren.

Volatility Skew (Bsp. Index)



Implizite Verteilung



Das Local Volatility Modell

Erweiterung des Black-Scholes-Merton Modells, um der Existenz des Volatility Surfaces gerecht zu werden; Berücksichtigung impliziter Verteilungsmomente

Das Local Volatility Modell

Annahme: Markt ist effizient. Alle Informationen sind in den Optionspreisen enthalten und alle gegebenen Optionspreise sind korrekt.
Volatilität ist deterministische Funktion von Restlaufzeit und Kursniveau: $\sigma = \sigma(t, S_t)$
→ Natürliche Erweiterung von Black-Scholes.

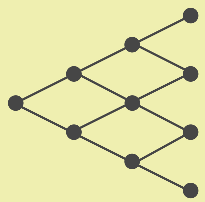
Idee: Vereinfachende Annahme, die die Bepreisung exotischer (pfadabhängiger) Optionen unter Berücksichtigung vorhandener Plain Vanilla Optionspreise ermöglicht.

Das Local Volatility Modell

Dupire (1992): Implizite Diffusion.
Derman, Kani (1992): Impliziter Baum.

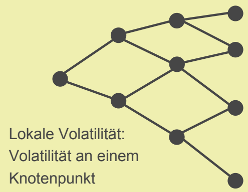
Die zugrundeliegende implizite Verteilung wird aus Marktpreisen von Optionen gewonnen.
Das Modell kann also zum Bepreisen und Market-Making pfadabhängiger Produkte verwendet werden.

Binomialbaum



Normalverteilung. Flaches Surface.σ = konstant

Binomialbaum (Derman Kani)



Implizite Verteilung. $\sigma = \sigma(t,S_t)$

2. Exotische Optionen

Warum exotische Optionen?

Begriffsdefinition
Optionen, deren Payoff sich auch mit der Hilfe von Plain Vanilla Optionen nicht perfekt replizieren lässt.

Motivation
Maßgeschneiderte Risikoprofile und Risikotransformation
Preislich attraktiv

Einfaches Beispiel: Bullisher Investor kauft einen Down-And-Out Call.
Günstiger als ein Plain Vanilla Call.
Konsequente Umsetzung einer positiven Marktmeinung bzgl. Kursniveau und Timing.
Benötigt der Investor den Call wirklich noch, wenn der Markt nach unten abdreht?

Anmerkung:
Das für die Beispiele und Graphiken verwendete Modell ist ein Black-Scholes Standardmodell. Dieses genügt, um das grundsätzliche Verhalten der exotischen Optionen zu demonstrieren.

Welche Arten von exotischen Optionen gibt es?

Digital Optionen: Thema dieses Vortrags.
Barrier Optionen: Thema dieses Vortrags.
Parisian Options: Erst Über-, bzw. Unterschreitung für bestimmten Zeitraum (de-)aktiviert die Barriere.
Chooser Optionen: Käufer entscheidet an einem Stichtag, ob er einen Call oder einen Put haben möchte.
Ladder Options: Bei Erreichen von Kursmarken werden Strikes nachgezogen und Gewinne festgehalten.
Forward Starting Options: Option beginnt erst zu einem zukünftigen Zeitpunkt zu leben.
Cliquet Options: Adjustierung des Strikes in bestimmten Zeitabständen, Gewinne werden festgehalten.
Asian Options: Optionen auf den Durchschnittskurs eines Underlyings.
Rainbow Optionen: BEST-OF-, WORST-OF-Optionen mit einer Korrelationskomponente.

Und viele andere…

DIGITAL OPTIONEN EUROPEAN STYLE

Was ist Skew-Risk?
Was ist Pin-Risk?

Einsatzgebiet von European Digital Optionen

EASY-Express-Zertifikate
Zahlen bei Fälligkeit einen vorher definierten Geldbetrag aus, wenn der Kurs am Laufzeitende über einer Barriere geschlossen hat.

Aus einem Termsheet für EASY-Express-Zertifikate:

„Notiert der Schluss-Kurs der Aktie im Maßgeblichen Handelssystem an der Maßgeblichen Börse am Bewertungstag **auf oder über dem Call-Level**, so wird am Fälligkeitstag je OPPENHEIM EASY-Express-Zertifikat der **Expressbetrag** gezahlt. Notiert der Schluss-Kurs der Aktie am Bewertungstag jedoch unterhalb des Call-Levels, so wird am Fälligkeitstag ein Betrag gezahlt, der nach folgender Formel berechnet wird:

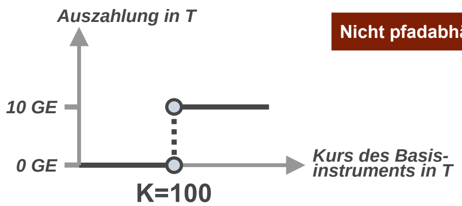
$$\left(\frac{\text{Schlusskurs}_{\text{Aktie}}}{\text{Referenzkurs}_{\text{Aktie}}}\right) \times \text{Nominalbetrag}$$

$\text{Schlusskurs}_{\text{Aktie}}$ entspricht dem Schlusskurs der Aktie am Bewertungstag, $\text{Referenzkurs}_{\text{Aktie}}$ entspricht dem Referenzkurs der Aktie bei Emission.“

Funktionsweise von European Digital Optionen

Zahlt am Laufzeitende einen bei Laufzeitbeginn (t=0) definierten Betrag bar aus, wenn
__der Kurs des Basisinstruments bei Laufzeitende (t=T) **über dem Basispreis „K“** notiert (**European Digital Call**)
__der Kurs des Basisinstruments bei Laufzeitende (t=T) **unter dem Basispreis „K“** notiert (**European Digital Put**)

Der Payoff eines European Digital Call sieht graphisch folgendermaßen aus:



Nicht pfadabhängig.

Ausstattungsmerkmale des im Folgenden betrachteten Digitals:	
Referenzkurs Aktie:	100 GE
Basispreis:	100 GE
Auszahlung:	10 GE
Vol:	20%
Restlaufzeit:	siehe Grafik

In t=T ist der Payoff eine Null-Eins-Entscheidung; deswegen auch oft Binäre Option genannt.

Funktionsweise von European Digital Optionen

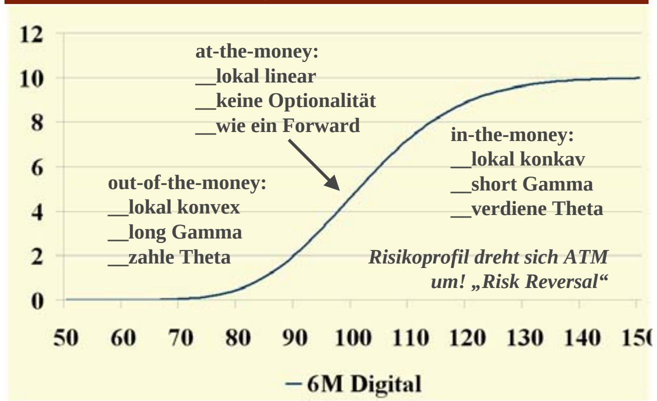
Interessante Eigenschaft:
__Der Preis eines European Digitals hängt nicht vom Erwartungswert ab, um wie viele GE der Basispreis bei Fälligkeit übertroffen wird
__Sondern vom Erwartungswert, der indiziert, in wie vielen Fällen ein Über-, bzw. Unterschreiten des Basispreises stattfinden wird
__Das ist eine Frage der Wahrscheinlichkeitsverteilung! Ob implizit oder subjektiv…
__Der Preis einer European Digital Option ist also direkt proportional zur (risikoneutralen) Wahrscheinlichkeit, das ein entsprechender Plain Vanilla Call ITM läuft.

$$\left.C(S,t) = S_t \times \underbrace{N(d_1)}_{\text{Delta des Calls}} - K\overbrace{e^{-r(T-t)} \times N(d_2)}^{\text{Modellpreis des European Digitals}}\right\} \text{BSM-Formel für den European Call}$$

Hat außer kurz vor Fälligkeit nichts mit der ITM Wahrscheinlichkeit zu tun!

European Digital Optionen: Preis vs. Spot

Preis des European Digital Call

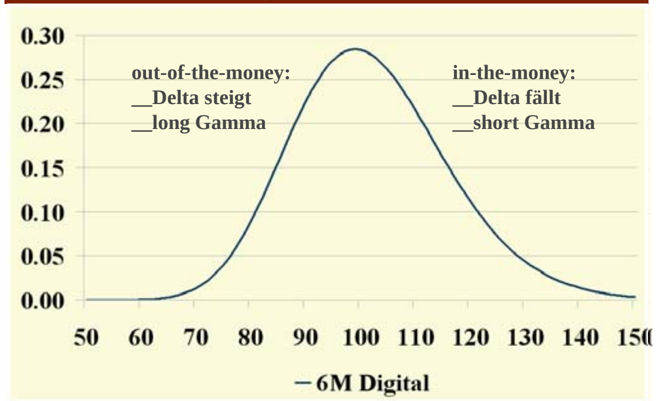


OTM: Lokale Konvexität. Positiver Hebeleffekt. Der Käufer riskiert wenig Einsatz, um vielleicht viel zu gewinnen.
ITM: Lokale Konkavität. Hebel wird immer geringer. Der Käufer riskiert mehr Einsatz, um weniger zu verdienen.

Extreme Konvexität bei Verfall: Unter 100 Wert von nahe Null, über 100 ist der Wert 10 GE: „Digitales“ oder „binäres“ Ereignis.

European Digital Optionen: Delta vs. Spot

Delta des European Digital Call

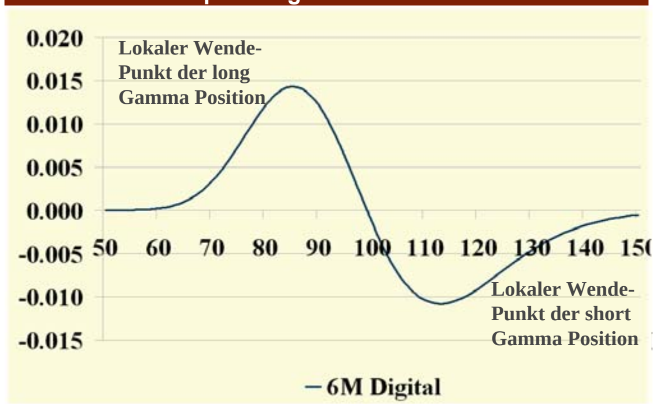


Delta eines Digitals.
Sieht aus wie das Gamma einer Plain Vanilla Option.

Je kürzer die Restlaufzeit, desto flacher die Griechen.

European Digital Optionen: Gamma vs. Spot

Gamma des European Digital Call

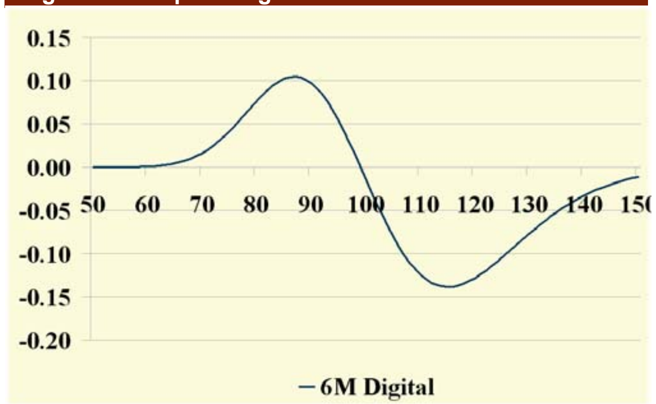


Gamma eines Digitals.
Hohes Skew-Risk: Veränderungen in der Steigung des Volatility-Skews (3. Moment) haben eine sehr große Auswirkung auf den Preis des Digitals.

Je kürzer die Restlaufzeit, desto größer das Gamma Exposure.

European Digital Optionen: Vega vs. Spot

Vega des European Digital Call



Vega eines Digitals.
Hohes Skew-Risk: Veränderungen in der Steigung des Volatility-Skews (3. Moment) haben eine sehr große Auswirkung auf den Preis des Digitals.

Je länger die Restlaufzeit, desto größer das Vega Exposure.

Replikation von European Digital Optionen

Wie stellt man in der Praxis dieses binäre Auszahlungsprofil her?
Mit Hilfe von Call-Spreads.

Der Händler hat sich verpflichtet, in einem halben Jahr 10 GE auszuzahlen, wenn der Kurs des Basisinstruments am Laufzeitende größer/gleich 100 GE notiert. Er kann diese Auszahlung z.B. durch folgende Kombination aus Plain Vanilla Optionen sicherstellen:

	Call-Spread	European Digital
95	3.02	3.01
96	3.35	3.35
97	3.70	3.70
98	4.06	4.06
99	4.42	4.42
100	4.78	4.78
101	5.14	5.14
102	5.50	5.50
103	5.85	5.84
104	6.18	6.18
105	6.51	6.51

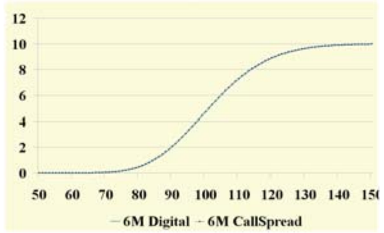
- Kauf 99.99 Call.
- Verkauf 100.00 Call.
- Dieser Spread wird 1000 Mal eingegangen
- Denn: 1000x0.01 GE = 10 GE

$$\text{Digital Call} = \lim \frac{C(K+\varepsilon)-C(K)}{\varepsilon} \text{ für } \varepsilon \to 0$$

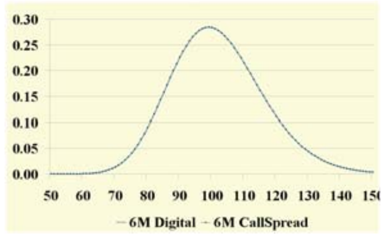
Klappt hervorragend – in der Theorie…

Replikation von European Digital Optionen

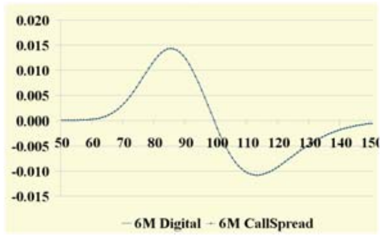
Preis vs. Spot



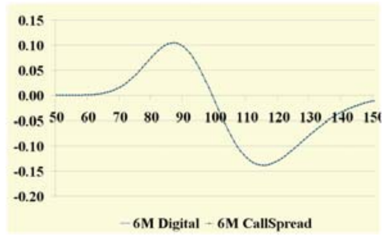
Delta vs. Spot



Gamma vs. Spot



Vega vs. Spot

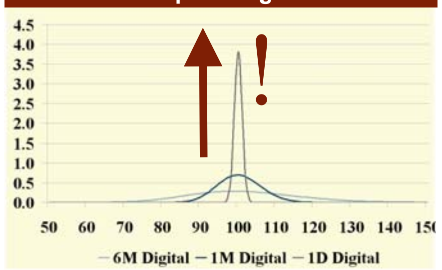


Pin-Risk von European Digital Optionen

Problem Nr.1: Pin-Risk.

Pin-Risk = Risiko, dass sich der Status der Payoff-Verpflichtung und damit die Griechen schlagartig ändern.
Je kürzer die Restlaufzeit, desto höher das Pin-Risk.
Es gibt grundsätzlich keine Möglichkeit, sich gegen Pin-Risk durch Plain Vanilla Instrumente abzusichern.

Delta des European Digital Call

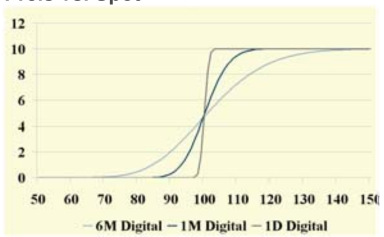


Dargestellt werden:
- 6 Monate Restlaufzeit („6M“)
- 1 Monat Restlaufzeit („1M“)
- 1Tag Restlaufzeit („1D“)

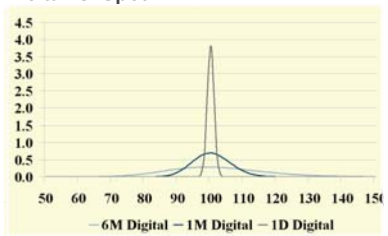
Welche Delta-Position soll der Hedger angesichts eines sich rasch ändernden Deltas einnehmen?
Kurz vor Verfall und nahe dem Basispreis ist das Delta theoretisch plus Unendlich…

Pin-Risk von European Digital Optionen

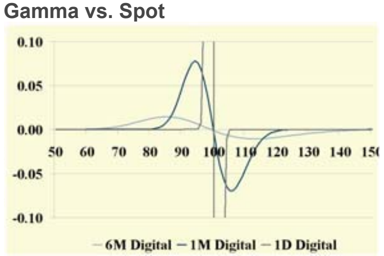
Preis vs. Spot



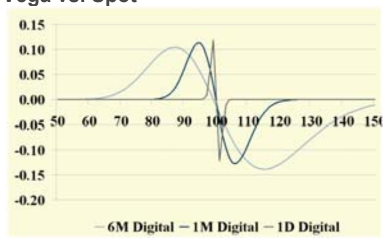
Delta vs. Spot



Gamma vs. Spot



Vega vs. Spot



Pin-Risk von European Digital Optionen

Theoretisch ist eine Verbesserung des Risikoprofils machbar:

__Das Risikoprofil verbessert sich für den Hedger, wenn er den Abstand der Basispreise des Call-Spreads vergrößert

__Der daraus resultierende Preis des Digitals wäre konservativer

__Und realistischer, denn es gilt wie immer: Der Preis für einen Payoff entspricht der während der Laufzeit anfallenden Hedgingkosten

Ein Extrembeispiel:

__Kauf 95.00 Call.

__Verkauf 100.00 Call.

__Dieser Spread wird 2 Mal eingegangen

__Denn: 2x5 GE = 10 GE

Was passiert? Die Sensitivitäten des Instruments verändern, bzw. verlagern sich.

Je geringer der Abstand der Basispreise, desto günstiger und aggressiver wird der Preis des zu replizierenden Digitals. Gleichzeitig erhöht sich das Pin-Risk.

Pin-Risk von European Digital Optionen

__Das Vergrößern des Abstandes der Basispreise hat ein Ziel: **Rücklagen bilden!**

__Diese Rücklagen werden aufgebraucht, wenn sich der Kurs um den Basispreis herum bewegt und häufige Veränderungen der Absicherungsposition notwendig werden

__Das Pin-Risk ist nicht verschwunden, es hat sich nur auf den 95er Strike verlagert

__Aber: Für die Fälle, in denen die Zahlungsverpflichtung wahrscheinlicher wird, wurde das Risiko reduziert

	Payoff European Digital	Payoff Call-Spread (95-100)
95	0	0
96	0	2
97	0	4
98	0	6
99	0	8
100	10	10
101	10	10
102	10	10
103	10	10
104	10	10
105	10	10

„Rücklagen bilden"…
(der Preis dieser tatsächlich durchführbaren Strategie ist höher als der Preis in einer unrealistischen, idealen Modellwelt)

…um der Zahlungsverpflichtung nachkommen zu können

Skew-Risk von European Digital Optionen

Problem Nr.2: Der Volatility-Skew.

Die Digital Option ist ein Skew-sensitives Finanzprodukt, sie gibt direktes Exposure auf das 3. Verteilungsmoment. Sie kann grundsätzlich nicht im Black-Scholes-Merton Modell bepreist werden. Wie der Skew durchschlägt, zeigt das folgende Beispiel, in dem bei der Option mit dem niedrigeren Basispreis die Volatilität von 20% auf 20.01% erhöht wurde.

	Call Spread (Skew)	European Digital
95	5.87	3.01
96	6.22	3.35
97	6.56	3.70
98	6.89	4.06
99	7.21	4.42
100	7.52	4.78
101	7.81	5.14
102	8.08	5.50
103	8.33	5.84
104	8.57	6.18
105	8.79	6.51

__Kauf 99.99 Call.

__Verkauf 100.00 Call.

__Dieser Spread wird 1000 Mal eingegangen

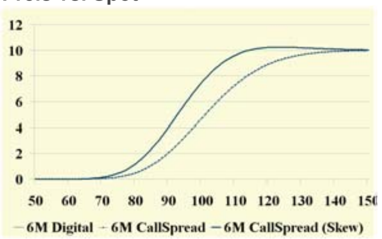
__Denn: 1000x0.01 GE = 10 GE

__Und: Skew wird berücksichtigt.

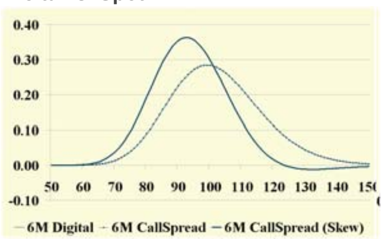
Preis mit Skew höher als der theoretische „flat-vol" Modell-Preis.

Funktionsweise von European Digital Optionen

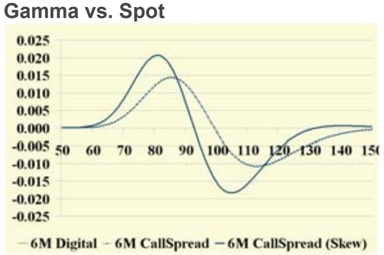
Preis vs. Spot



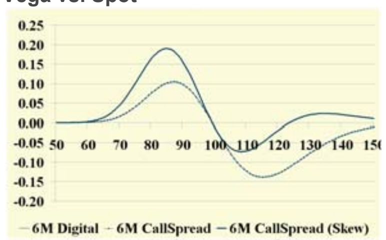
Delta vs. Spot



Gamma vs. Spot



Vega vs. Spot



Skew-Risk von European Digital Optionen

__Je länger die Restlaufzeit, desto größer das Skew Risk und damit der Einfluss einer sich verändernden Steigung des Volatility Skews.
__Skew Risk kann abgesichert werden: Zum Beispiel durch den Handel von Risk-Reversals (z.B. Kauf des 80% Puts, Verkauf des 120% Calls)
__Mit abnehmender Restlaufzeit muss der Abstand der beiden Basispreise verringert werden (Rollkosten!).
__Kurz vor Laufzeitende verschwindet das Skew Risk fast vollständig. Der Einfluss des Pin Risks nimmt im Gegenzug deutlich zu.
__Die größte Unsicherheit beim Hedging eines Digitals entsteht kurz vor Fälligkeit!

Schlüsselpunkte:

I) SKEW-RISK
Skew muss im Pricing berücksichtigt werden, sonst fehlerhafte Preise. Denn: Asymmetrische Eintrittswahrscheinlichkeiten!
Ein dynamischer Hedge könnte mit einem weiten Call-Spread aufgesetzt werden, der im Laufe der Zeit verengt wird (z.B. 80-120 Risk Reversal wird ersetzt durch 95-105 Risk Reversal)

II) PIN-RISK
Je näher der Verfall kommt, desto mehr wird das Skew-Risk zu einem Pin-Risk: Extreme Veränderung der Hedgeposition bei nur geringen Marktveränderungen.

__Wer beim Pricing eines Skew-sensitiven Produktes die Existenz des Skews unberücksichtigt läßt, wird vom „wahren“ Preis der Struktur signifikant abweichen.
__Wer beim Pricing eines Produktes das Pin-Risk unberücksichtigt lässt, hat bei Erreichen des relevanten Preisniveaus ein hohes Risiko, das sich beim initialen Pricing nicht im Preis der Struktur widerspiegelt.

Diese beiden Punkte gelten für ALLE Optionstypen mit ähnlichem Risikoprofil.

DIGITAL OPTIONEN AMERICAN STYLE

Was bedeutet Pfadabhängigkeit?

Einsatzgebiet von American Digital Optionen

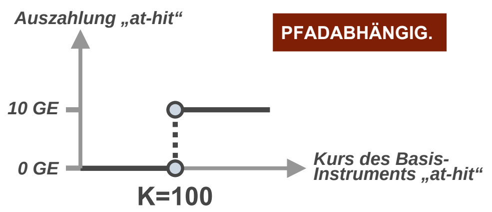
Take10-Optionsscheine
Zahlen bei Erreichen einer definierten Barriere augenblicklich einen vorher definierten Geldbetrag aus. Wird die Barriere während der Laufzeit nicht berührt, so verfällt der Schein wertlos.

Aus einem Termsheet für TAKE 10-Optionsscheine:

„Der Anleger hat das Recht auf Erhalt eines Festbetrags, sobald bei Take 10 UP-Scheinen der Stand des Basiswerts zwischen dem Verkaufsbeginn und dem Fälligkeitstag (jeweils einschließlich) **zu irgendeinem Zeitpunkt** während der offiziellen Preisfeststellung den Take 10-Level **erreicht oder überschreitet bzw.** bei Take 10 DOWN-Scheinen **erreicht oder unterschreitet** (das „Knock-In-Ereignis“). **Im Falle des Eintretens eines solchen Knock-In-Ereignisses** wird die Emittentin je Take 10-Schein **den Festbetrag zahlen**. Wird der Take 10-Level während der Laufzeit **nicht erreicht**, **verfällt der Schein wertlos**; die Emittentin zahlt in diesem Fall zur steuerlichen Verrechnung einen Betrag von EUR 0,001 je Take 10-Schein.“

Funktionsweise von American Digital Optionen

Zahlt sofort („AT-HIT“ / „IF-TOUCHED“) – und nicht erst bei Fälligkeit - einen bei Laufzeitbeginn (t=0) definierten Betrag bar aus, wenn
__der Kurs des Basisinstruments während der Laufzeit **den Basispreis „K“** berührt oder übersteigt (**American Digital Call**)
__der Kurs des Basisinstruments während der Laufzeit **den Basispreis „K“** berührt oder unterschreitet (**American Digital Put**)



Ausstattungsmerkmale des im Folgenden betrachteten Digitals:	
Referenzkurs Aktie:	100 GE
Basispreis:	100 GE
Auszahlung:	10 GE
Vol:	20%
Restlaufzeit:	siehe Grafik

Auszahlung „at-hit“ bzw. „if-touched“.

Funktionsweise von American Digital Optionen

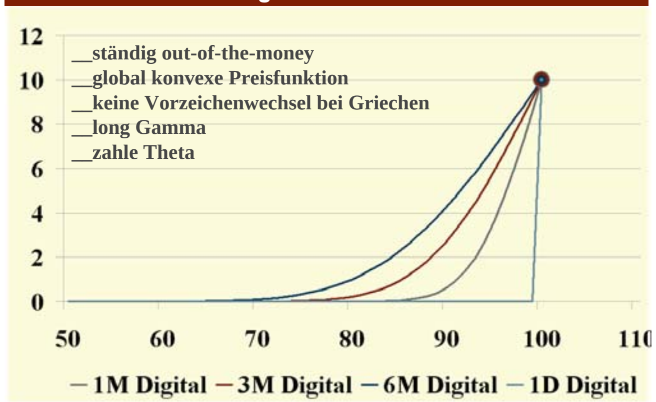
Merkmale
__Pfadabhängigkeit
__Fälligkeit kann zu jedem Zeitpunkt eintreten
__American Digital ist immer mindestens soviel wert wie der entsprechende European Digital; Chance des Hit-Ereignisses ist mindestens genauso groß; typischerweise ist der Preis doppelt so hoch.

Nie „innerer Wert“
__American Digital kann im Gegensatz zum European Digital nicht „ins Geld“ laufen
__Long American Digital bedeutet also: Niemals short Gamma oder short Vega

Stopping Time, Expected Exit Time
__Der American Digital ist eine Wette auf Zeit, nicht auf ein Asset im direkten Sinn
__Die Exit Time hängt von der Volatilität ab: Je höher die Volatilität, desto früher ist mit dem Exit zu rechnen
__Preis ist neben dem Volatility Skew auch sensitiv gegenüber der Term-Structure der Volatilität

American Digital Optionen: Preis vs. Spot

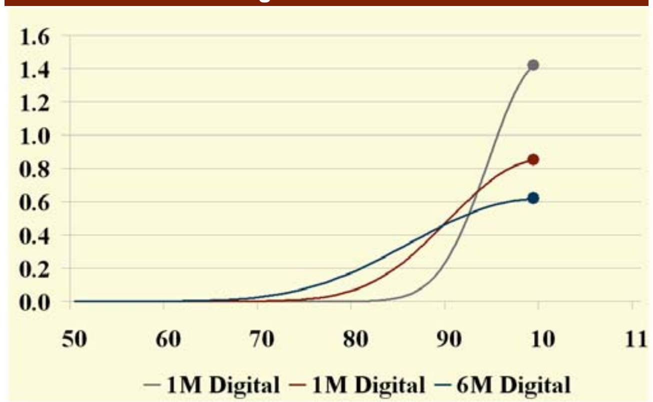
Preis des American Digital Call



<u>**Option ist immer OTM**</u>: Globale Konvexität. Positiver Hebeleffekt. Der Käufer riskiert wenig Einsatz, um vielleicht viel zu gewinnen.

American Digital Optionen: Delta vs. Spot

Delta des American Digital Call

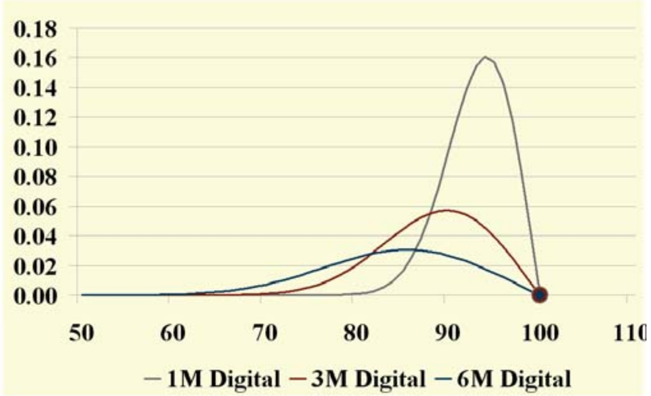


Je näher die Barriere und je näher das Laufzeitende, desto höher das Delta.

Gegen Laufzeitende wird das Delta-Hedging schwieriger.

American Digital Optionen: Gamma vs. Spot

Gamma des American Digital Call

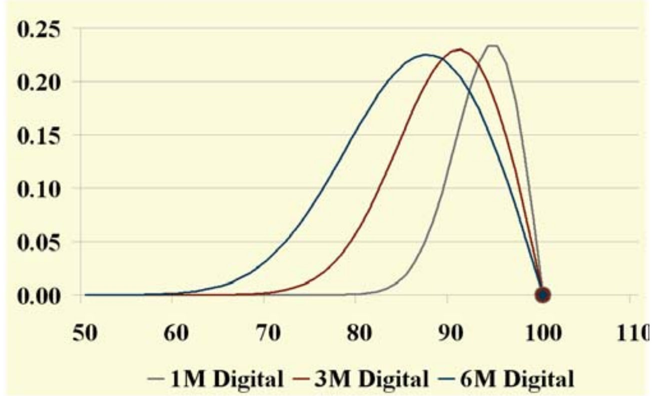


Bei Erreichen der Barriere verschwindet das Gamma vollständig.

Kritisch wird es kurz vor Fälligkeit und kurz vor Erreichen der Barriere.

American Digital Optionen: Vega vs. Spot

Vega des American Digital Call



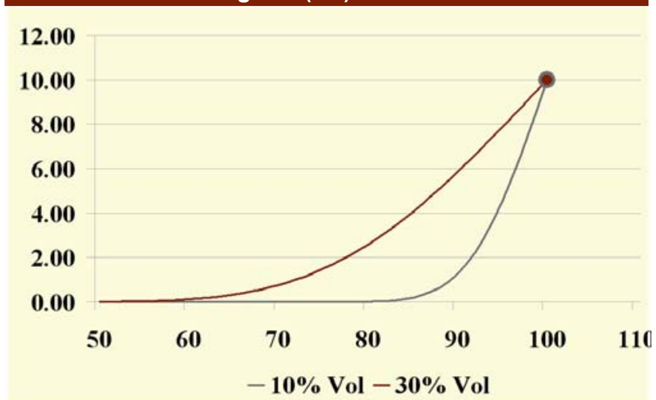
Bei Erreichen der Barriere verschwindet das Vega vollständig.

<u>Folgen für den Hedge</u>
Sichert man mit Plain Vanilla Optionen ab, so muss man sich folgendes bewußt sein: Das sind Instrumente, deren Gamma und Vega **nicht** verschwindet, sondern bestehen bleibt.

Statische Replikaktionsstrategien funktionieren nicht ansatzweise!

American Digital Optionen: Optionspreis vs. Vol

Preisfunktion des Digitals (6M) bei untersch. Vol-Levels



Eine höhere Volatilität macht den American Digital wertvoller.

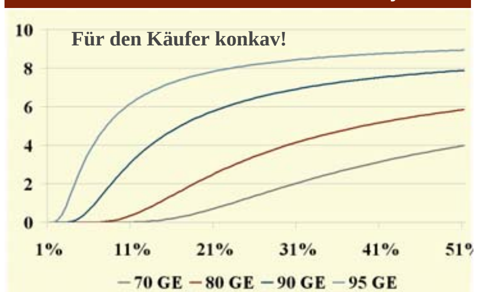
Allerdings: Je näher die Barriere kommt, desto unwichtiger wird der Volatilitätsunterschied.

Höhere Volatilität „bringt die Barriere näher an den Kurs heran“. Höhere Volatilität verkürzt die Stopping Time.

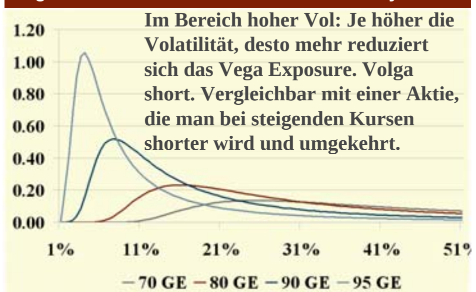
American Digital Optionen: Volga-Position

Je nach Nähe der Barriere ergibt sich für den Käufer des American Digitals eine Volga-Position. Nahe der Barriere ist der Optionspreis eine konkave Funktion der Vol. Der Preis des American Digitals steigt in dieser Situation mit steigender Volatilität, aber mit abnehmender Intensität.

Preis für verschiedene Vol-Levels und Moneyness



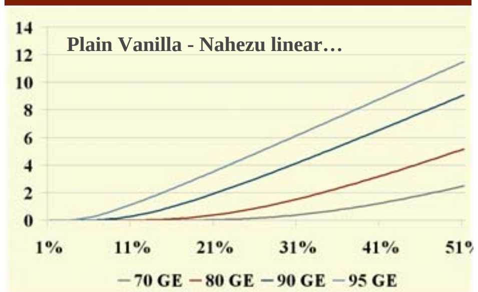
Vega für verschiedene Vol-Levels und Moneyness



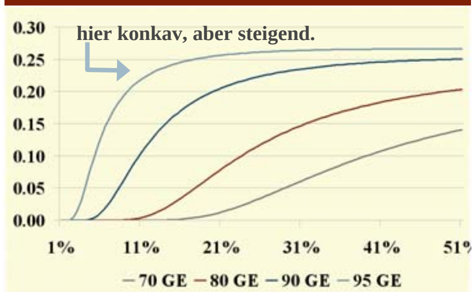
American Digital Optionen: Volga-Position

Auswirkung verschiedener Volatilitätsniveaus auf den Preis eines **Plain Vanilla Calls** mit Basispreis 100 und einer Restlaufzeit von 6 Monaten.

Preis für verschiedene Vol-Levels und Moneyness



Vega für verschiedene Vol-Levels und Moneyness



Schlüsselpunkte:

I) Durationsrisiko

Der American Digital ist mit seiner Barriere eine Wette auf Duration. Sich verändernde Volatilitäten haben eine theoretische Verkürzung/Verlängerung der Option zur Folge. Statische Replikation mit Plain Vanillas kann hier gar nicht funktionieren.

II) Sprungrisiko

Der American Digital besitzt kein stetiges Auszahlungsprofil. Wird die Barriere erreicht, so muss die Delta-Position sofort aufgelöst werden. Gelingt das nicht, entsteht unter Umständen eine unbeabsichtigte PnL (Slippage). Ursache kann z.B. fehlende Liquidität im Basisinstrument sein.

III) Vega Risiko nach dem Erreichen der Barrier

Die Griechen verschwinden bei Erreichen der Barriere. Das sollte dann auch mit den Griechen des Hedge-Portfolios passieren: Schwer zu realisieren. Wichtig wg. Stopping Time: Term-Structure der Volatilität.

IV) Höhere Momente: Volga Position

Für den Käufer, der sein Vega absichert, ist eine hohe Volatilität der Volatilität unvorteilhaft. Der Verkäufer profitiert hingegen von Bewegungen der Volatilität in der Nähe der Barriere. Wenn man mit Plain Vanillas absichert, so muss man sich der Tatsache bewusst sein, dass diese (nahezu) linear in der Volatilität sind.

BARRIER OPTIONEN

__Pin-Risk
__Skew-Risk
__Pfadabhängigkeit

Typen von Barrier Optionen

Reguläre Barrier Optionen

Merkmal: Die Option besitzt keinen inneren Wert, wenn es zu einem Barrier-Event kommt.

Hedgingrisiken: Vergleichsweise niedrig.
__Down-And-Out Call
__Up-And-Out Put
__Down-And-In Call
__Up-And-In Put

Reverse Barrier Optionen

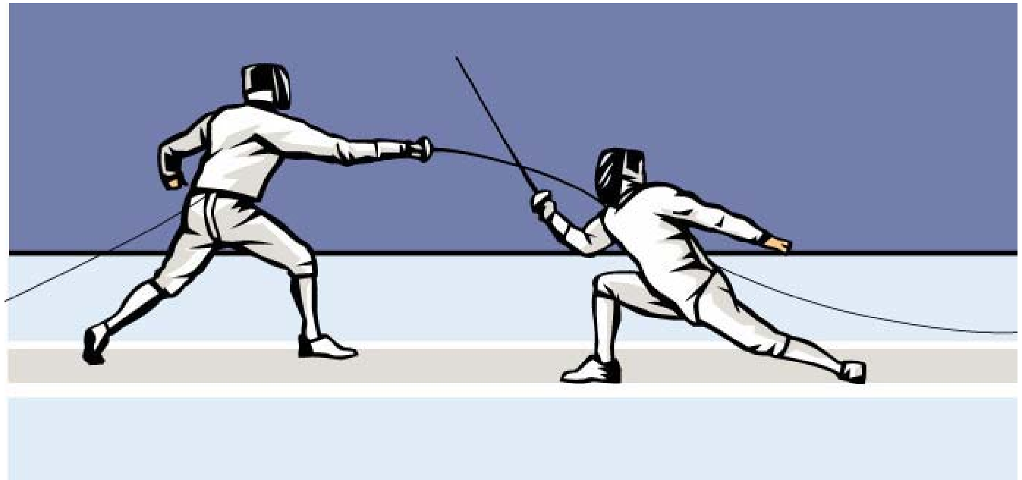
Merkmal: Die Option besitzt inneren Wert, wenn es zu einem Barrier-Event kommt.

Hedgingrisiken: Signifikant.
__Down-And-Out Put
__Up-And-Out Call
__Down-And-In Put
__Up-And-In Call

Einsatzgebiete von Barrier Optionen

PROTECT-Bonus-Zertifikate (Down-and-Out Put)
LOCK-IN-Bonus-Zertifikate
PROTECT-Discount-Zertifikate
PROTECT-Aktienanleihen (Down-and-In Put)
PROTECT-Outperformance-Zertifikate
Cash-Collect-Zertifikate
TWIN-WIN-Zertifikate
VICTORY-Zertifikate
und andere…

DOWN-AND-IN PUT



Einsatzgebiet von Down-And-In Puts

PROTECT-Aktienanleihen
Der Kupon der PROTECT-Aktienanleihe ergibt sich maßgeblich aus der Prämie, die der Investor durch den Verkauf eines Down-And-In Puts an die Emittentin erhält. Im Gegensatz zu einer CLASSIC-Aktienanleihe, bei der der Investor einen Plain Vanilla Put short ist. Vorteil: Notiert die Aktie bei Fälligkeit unter dem Basispreis, so erhält der Investor bei der CLASSIC-Variante auf jeden Fall Aktien geliefert, bei der PROTECT-Variante tritt dieser Fall nur dann ein, wenn die Barriere des DI-Puts während der Laufzeit aktiviert worden ist und damit der Plain Vanilla Put erst ins Leben gerufen wurde. Die Wahrscheinlichkeit, Aktien angedient zu bekommen ist somit deutlich geringer. Nachteil: Die zu vereinnahmende Prämie und damit der Kupon ist grundsätzlich etwas geringer als bei der CLASSIC-Variante.

Aus einem Termsheet für PROTECT-Aktienanleihen:

„Bei Fälligkeit wird die Anleihe in Höhe des Nennbetrags zurückgezahlt; notiert der Schlußkurs des Basiswerts am Ausübungstag jedoch unter dem Basispreis **und** wird der Kurs des Basiswerts während des Beobachtungszeitraums wenigstens einmal auf oder unter dem PROTECT-Preis festgestellt, so ist die Emittentin berechtigt, statt dessen die festgelegte Anzahl von Aktien des Basiswerts je 1.000,-- Nennbetrag zu liefern. […] Die Verzinsung wird unabhängig von der Kursentwicklung der Aktie gezahlt."

Funktionsweise von Down-And-In Puts

Wird nur dann zum europäischen Plain-Vanilla Put, wenn die Barriere durch eine Abwärtsbewegung des Basisinstruments berührt, bzw. von oben nach unten durchbrochen wird.
Wird die Barriere während der Laufzeit nicht erreicht, verfällt der DI-Put wertlos.

Der DI-Put ist eine Reverse Barrier Option.
Warum „Reverse"? Kommt es zum Knock-In, dann als weit im Geld liegender Put.
Je weiter der möglicherweise entstehende Put ins Geld läuft, desto näher kommt er der Barriere.

Hauptrisiken bei der Replikation
1) Pin-Risk als Execution-, bzw. Delta-Risiko in der Nähe der Barriere.
2) Vega-Risiko: Der DI-Put ist ein sehr Skew-sensitives Produkt.

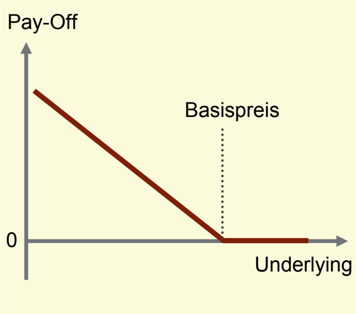
Down-And-In Put
Ausstattungsmerkmale

Referenzkurs Aktie:	100 GE
Basispreis:	100 GE
Barriere:	70 GE
Restlaufzeit:	siehe Grafik
Beobachtung:	kontinuierlich

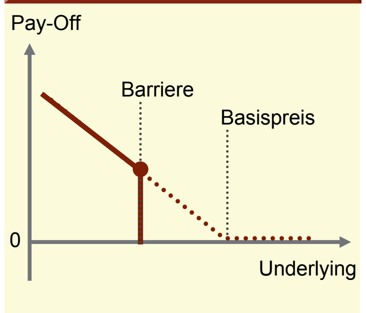
Vergleich mit dem Plain Vanilla Put (Payoff)

Auszahlungsprofil eines Plain Vanilla Puts im Vergleich zu dem eines Down-And-In Puts.
Das Auszahlungsprofil des Down-And-In Puts wird durch die Aktivierung der Barriere erst ins Leben gerufen.

Plain Vanilla Put



Down-And-In Put



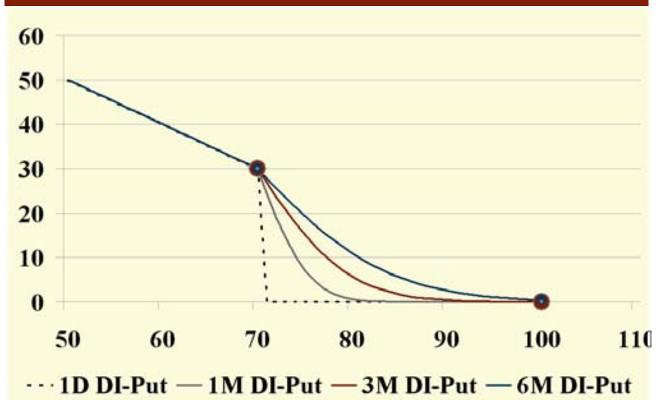
Vergleich mit dem Plain Vanilla Put (Preis, Griechen)

	Plain Vanilla Put	Down-And-In Put
Referenzkurs	100%	100%
Laufzeit	12 Monate	12 Monate
Basispreis	100%	100%
Barriere	-	70%
Preis der Option	**12,60%**	**10,80%**
Delta Risiko	Delta immer negativ	Delta neg., aber > |-1|
Gamma Risiko	Gamma immer positiv	Gamma immer positiv
Vega Risiko	Vega immer positiv	Vega immer positiv

Obwohl die Option noch gar nicht „lebt“ erhält der Verkäufer eine attraktive Prämie.

Down-And-In Put: Preis vs. Spot

Preis des Down-And-In Put



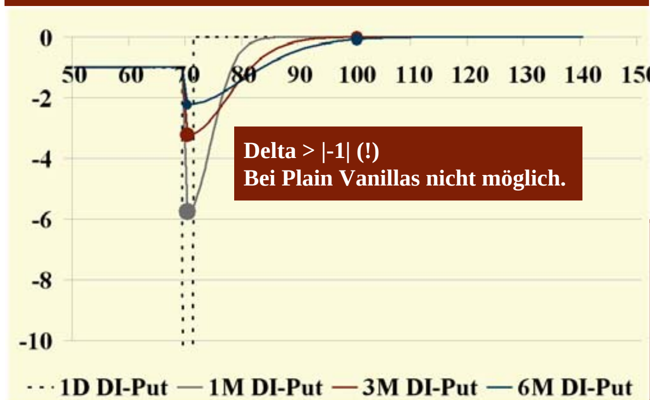
Je höher die Restlaufzeit, desto werthaltiger der DI-Put.

Bei Erreichen der Barrier ist der Put tief im Geld (Delta: -1).

Die Steigung der Preisfunktion ändert sich bei Erreichen der Barriere schlagartig: Pin-Risk, plötzliche große Änderung des Deltas.

Down-And-In Put: Delta vs. Spot

Delta des Down-And-In Put



Weit von der Barriere weg befindet sich das Delta noch im „normalen“ Bereich. An der Barriere ist es typischerweise ein Vielfaches von Eins, bzw. minus Eins. ACHTUNG: Die Option wird zu einem Plain-Vanilla Put, dessen Delta im Betrag nie größer Eins werden kann.

	1D	1M	3M	6M
69.00	-1.00	-1.00	-1.00	**-0.99**
70.01	-123.57	-5.75	-3.23	**-2.23**
71.00	0.00	-5.57	-3.20	**-2.22**
90.00	0.00	0.00	-0.12	**-0.42**

Down-And-In Put: Delta vs. Spot

Das Delta wird nahe der Barriere typischerweise im Betrag größer 1. Kommt es zum Knock-In Event, springt das Delta auf das Delta eines tief im Geld liegenden Plain Vanilla Puts (-1).

Beispiel: **Der Hedger ist den DI-Put long.** Um seine Delta-neutrale Position aufrecht zu erhalten, kauft er auf dem Weg hin zur Barriere immer mehr Aktien. Und zwar ein Vielfaches des Deltas einer Plain Vanilla Option. Annahme: Die Barrier wird berührt. Das Delta springt von -5 auf -1. Der Hedger ist 500.000 Aktien long – bei einem Delta von -5 ist das auch seine korrekte Position. Da das Delta nun auf -1 springt, muss er augenblicklich 400.000 Aktien verkaufen, um wieder Delta-neutral zu sein.
Das bedeutet: Aufbauen von Verkaufsdruck auf die Aktie **NACH** Erreichen der Barriere.
Dem muss man sich als Hedger nicht aussetzen: Puffer einbauen (Risk-Margin), Rücklagen bilden (z.B. Barrier Shift einbauen). Modellexterne Kosten.

Wie viele GE ist die für den Fall des Unterschreitens der Barriere erwartete Slippage wert? Der Betrag, den man einzahlen würde, ergibt sich aus dem Produkt von Deltaposition und der (subjektiv) erwarteten Slippage. Dieser Betrag wird mit der Wahrscheinlichkeit des Barrier Events multipliziert. Die Wahrscheinlichkeit des Barrier Events entspricht dem Preis eines American Digitals, der die gleiche Laufzeit wie die Barrier Option hat und eben diesen Betrag bei Aktivierung der Kursschwelle auszahlt.

	1D	1M	3M	6M
69.00	-1.00	-1.00	-1.00	**-0.99**
70.01	-123.57	-5.75	-3.23	**-2.23**
71.00	0.00	-5.57	-3.20	**-2.22**
90.00	0.00	0.00	-0.12	**-0.42**

Modellexterne Preisfaktoren

Volumen der durchgeführten Transaktion
Je größer das Volumen, desto mehr Aktien müssen bei Eintreten eines Barrier-Events an der Barriere verkauft werden, um eine Delta-neutrale Position zu gewährleisten. Risiko des Traders: Er kann die Aktien erst unterhalb der Barriere verkaufen.

Abstand zwischen Basispreis und Barrier („Stealth“)
Wieviel mehr das Delta im Betrag größer Eins ist, hängt direkt mit der Höhe des inneren Werts des Puts zusammen. Bei einem 130/70 DI-Put wird dies deutlich höher sein als bei einem 100/70 DI-Put (Pin-Risk).

Abstand zwischen aktuellem Aktienkurs und Barrier-Niveau („Health“)
Je weiter die Barriere vom aktuellen Aktienkurs entfernt ist, desto vorsichtiger sollte bepreist werden. Denn: Je weiter der Kurs fällt, desto mehr wird die Volatilität steigen. Ein 100/70 DI-Put kann aggressiver bepreist werden als ein 100/50 DI-Put (Pin-Risk, Execution-Risk, Vega-Risk).

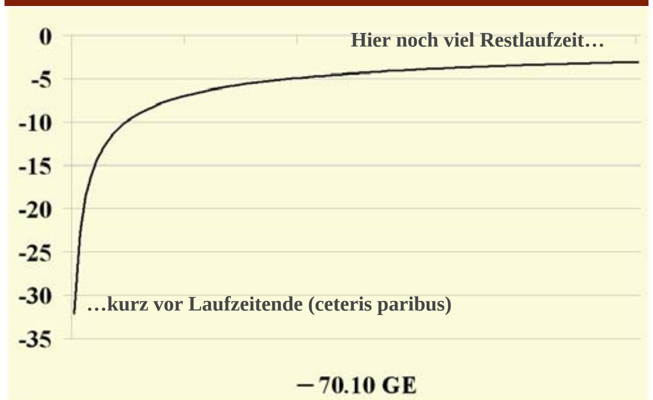
Volatilität des Basisinstruments
Je höher die Volatilität des Basisinstruments, desto höher die Wahrscheinlichkeit eines Barrier-Events, das der Auslöser für die schlagartige Veränderung der Delta-Position ist (Pin-Risk).

Restlaufzeit
Je geringer die Restlaufzeit, desto schneller ändert sich das Delta, v.a. in der Nähe der Barriere. Je näher der Fälligkeitstermin, desto konservativer sollte bepreist werden, wenn man Pin-Risk ernst nimmt.

Diese Faktoren werden von einem Pricing-Modell nicht automatisch erfaßt.

Down-And-In Put: Delta und Restlaufzeit

Delta des DI-Put nahe der Barriere vs. Restlaufzeit

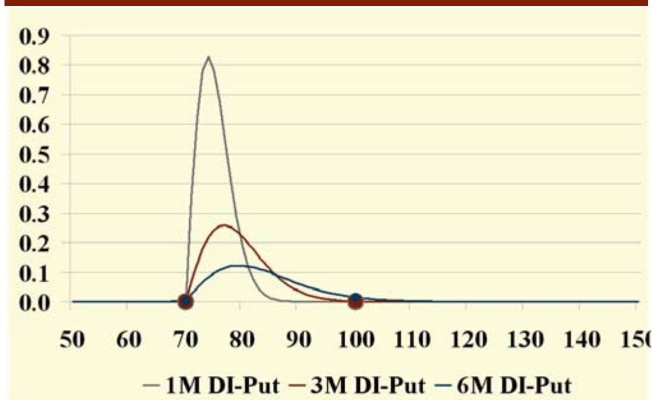


Je geringer die Restlaufzeit, desto schneller ändert sich das Delta, v.a. in der Nähe der Barriere.

Ein Modell, das auf der Annahme eines kontinuierlich möglichen Handels in einem Markt ohne Kurssprünge und beliebiger Markttiefe ohne Geld-Brief Spanne fußt, wird diese Tatsache beim Bepreisen des DI-Puts außer Acht lassen.

Down-And-In Put: Gamma vs. Spot

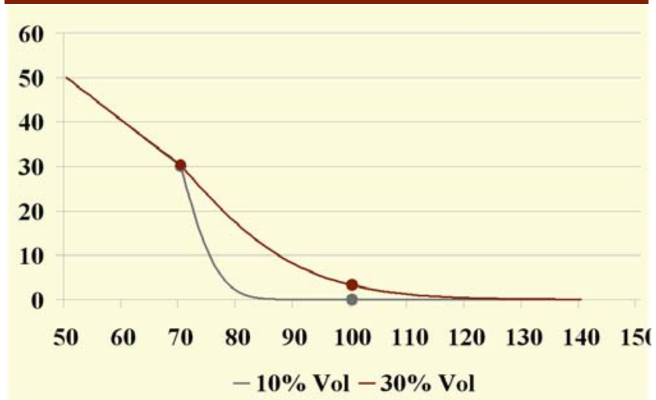
Gamma des Down-And-In Put



Je kürzer die Restlaufzeit, desto massiver wird die Gamma-long Position des Hedgers unweit der Barrier.

Down-And-In Put: Optionspreis vs. Vol

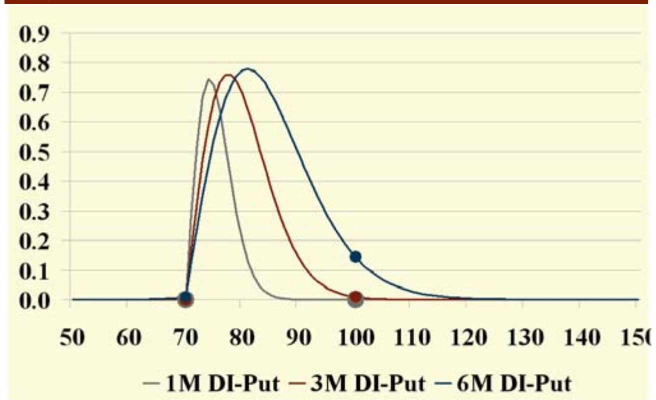
Preisfunktion des DI-Put bei untersch. Vol-Levels



Je höher, die Volatilität, desto wertvoller der DI-Put für den Käufer.
Die Knock-In Wahrscheinlichkeit ist bei einer höheren Volatilität größer.

Down-And-In Put: Vega vs. Spot

Vega des Down-And-In Put



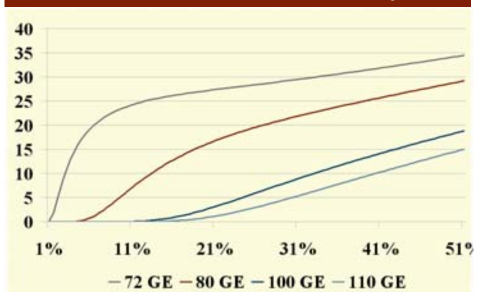
Der Käufer des DI-Puts ist Vega-long. Das Vega sitzt im Bereich unweit der Barriere. Der Käufer ist also long Skew.

Er profitiert, wenn der Volatility Skew steiler wird.
Das ist einleuchtend, denn mit der gestiegenen Downside-Volatilität erhöht sich die implizite Wahrscheinlichkeit des Barrier-Events.

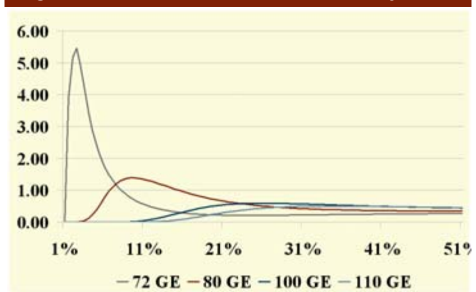
Down-And-In Put: Volga-Position

Nahe der Barriere wirkt sich eine höhere Volatilität positiv auf den Wert des DI-Puts aus. Dieser Effekt geht allerdings mit abnehmender Intensität vonstatten (siehe erste Grafik). Die zweite Grafik zeigt, dass sich die Vega-Position des DI-Put Käufers mit steigender Volatilität verringert – das ist ungefähr so, als wenn man anfänglich eine große Aktienposition in einer Aktie hat, die dann anfängt, ständig zu steigen, nur die Aktienposition wird mit jedem gestiegenen Euro kleiner.

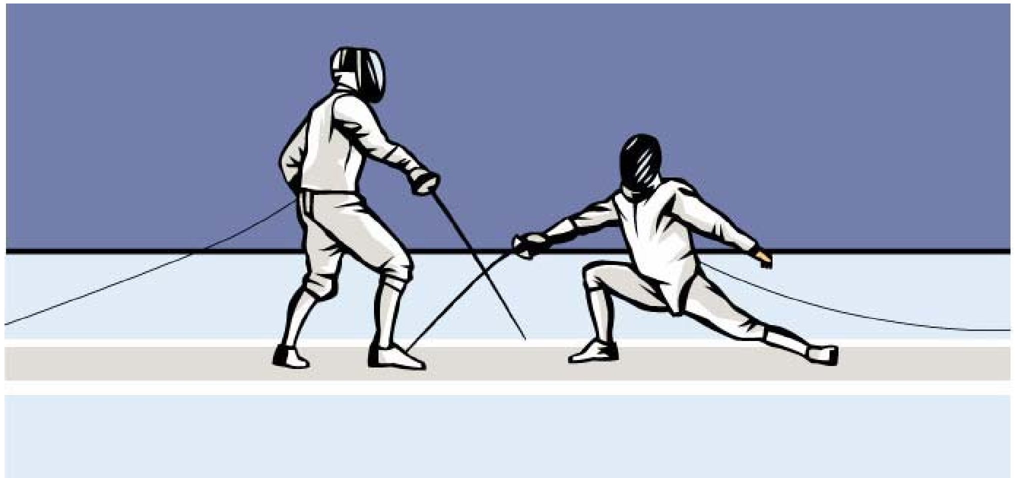
Preis für verschiedene Vol-Levels und Moneyness



Vega für verschiedene Vol-Levels und Moneyness



DOWN-AND-OUT PUT



Funktionsweise von Down-And-Out Puts

Ist bereits bei Laufzeitbeginn ein europäischer Plain-Vanilla Put. Die Barriere befindet sich unterhalb des Basispreises (z.B. 130/70). Wird die Barriere durch eine Abwärtsbewegung des Basisinstruments aktiviert, so verfällt der DO-Put wertlos.

Der DO-Put ist eine Reverse Barrier Option.
Warum „Reverse“? Wenn das Barrier-Event stattfindet, dann tief im Geld.
Je weiter der möglicherweise entstehende Put ins Geld läuft, desto näher kommt er der Barriere.
Das hat wieder bewegungsfreudige Griechen zur Folge – noch mehr als beim DI-Put.

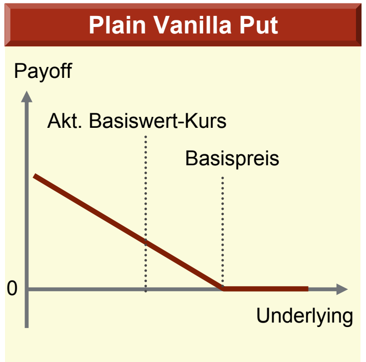
Hauptrisiken bei der Replikation
1) Pin-Risk als Execution- bzw. Delta-Risiko in der Nähe der Barriere.
2) Vega-Risiko: Der DO-Put ist ein sehr Skew-sensitives Produkt.
Die Risikoquellen sind also mit denen eines DI-Put meist identisch, in ihrer Intensität jedoch stärker.

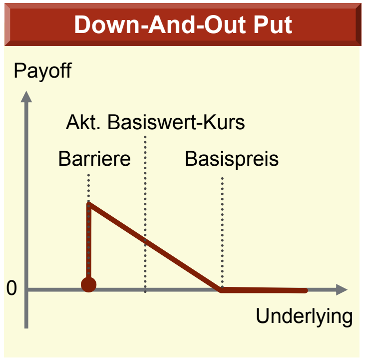
Down-And-Out Put Ausstattungsmerkmale

Referenzkurs Aktie:	100 GE
Basispreis:	130 GE
Barriere:	70 GE
Restlaufzeit:	siehe Grafik
Beobachtung:	kontinuierlich

Vergleich mit dem Plain Vanilla Put (Payoff)

Auszahlungsprofil eines Plain Vanilla Puts im Vergleich zu dem eines Down-And-Out Puts.
Das Auszahlungsprofil des Down-And-Out Puts wird durch die Berührung der Barriere deaktiviert. Die Option verfällt in diesem Fall wertlos.





Der Down-And-Out Put

„Managing reverse barrier options can be a difficult proposition, especially if as it gets close to maturity spot trades near the barrier.“

Down-And-Out Put ist eine Reverse Barrier Option
Läßt sich zum besseren Verständnis zerlegen in…
…eine **Plain Vanilla Put Option** und einen **American Digital**.

Auf den ersten Blick verwunderlich:
Manchmal hat ein Down-and-Out Put entlang der Spot-Achse ein **positives Delta**.
Der Optionspreis fällt, wenn der Markt fällt (und es handelt sich hier um einen ITM Put), also der innere Wert zunimmt!

Vergleich mit dem Plain Vanilla Put (Preis, Griechen)

	Plain Vanilla Put	Down-And-Out Put
Referenzkurs	100%	100 %
Laufzeit	12 Monate	12 Monate
Basispreis	130%	130%
Barriere	-	70%
Preis der Option	**32,80%**	**11,90%**
Delta Risiko	Delta immer negativ	Vorzeichenwechsel
Gamma Risiko	Gamma immer positiv	Vorzeichenwechsel
Vega Risiko	Vega immer positiv	Vorzeichenwechsel

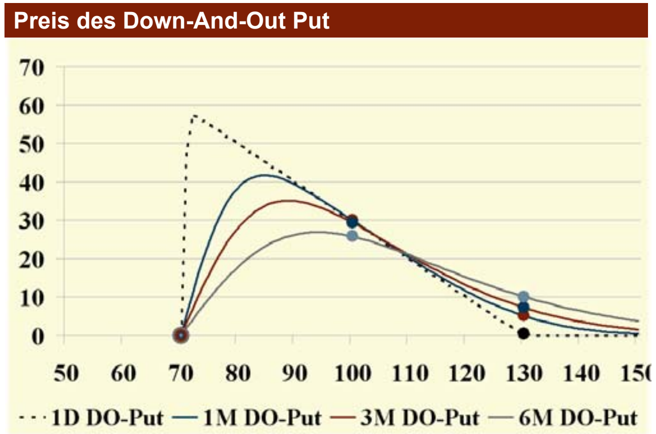
Der Down-And-Out Put ist im Vergleich zum Plain Vanilla Put sehr günstig.

Der Down-And-Out Put

Wir haben ein Spannungsfeld aus zwei Polen:
1) Die reguläre Put Option: Dominiert fern der Barrier, in der Gegend um den Strike.
2) Einer Wette auf das Überleben des DO-Puts: Dominiert nahe der Barrier. Ähnlich einem American Digital (aus der Sicht des Verkäufers des DO-Puts: long American Digital Put).

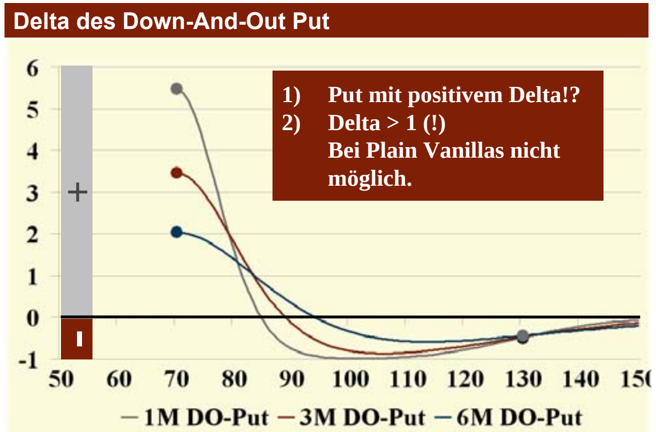
Auf den ersten Blick sonderbar: Der Zeitwertverlust
Reverse Knock-Outs haben einen Zeitwertverfall, der sich **INVERS** zu dem einer Plain Vanilla Option verhält.
Das bedeutet: Der Zeitwert des Down-and-Out Puts ist zu Laufzeitbeginn klein, gegen Laufzeitende dagegen hoch. Wie bei einem American Digital.

Down-And-Out Put: Preis vs. Spot



Die Preisfunktion ist nicht nur konvex, sondern auch konkav.

Down-And-Out Put: Delta vs. Spot



Weit genug von der Barriere entfernt verhält sich der DO-Put wie man es von einem Put erwarten würde – das Delta ist negativ.

In der Nähe der Barriere kommt es dann zum Vorzeichenwechsel und einem explosionsartigen Anstieg der Sensitivität.

Mit Berühren der Barriere verschwindet die Reagibilität zum Aktienkurs plötzlich.

Ursache des Vorzeichenwechsels beim Delta

Warum gibt es beim Exoten den Vorzeichenwechsel?
Das Delta des DO-Puts ist zuerst negativ (so wie es beim Put sein soll), wird dann aber in der Nähe der Barrier positiv. Warum ist das so?
Nahe der Barrier verliert der DO-Put seinen Optionscharakter. Aus „viel Optionalität" wird eine „Tatsachenentscheidung".
Wenn man umgekehrt von der Barrier aus kommt, nimmt das Delta nach oben ab – klar, denn der DO-Put wird wieder mehr ein „Put" im eigentlichen Sinn seines Wesens, und dessen Delta ist negativ.

Andere Argumentation:
Ziel des Hedger ist es, dass Auszahlungsprofil eines DO-Puts zu imitieren. Dazu reicht ihm in der BSM-Welt der Delta-Hedge, den er aus der ersten Ableitung der Optionspreisfunktion nach dem Aktienkurs erhält. Die oben konvexe (konvex – wie beim normalen Put) und unten konkave Preisfunktion (konkav – wegen des potenziellen Knock-Outs) führt zu der gezeigten Deltakurve.

Das extrem hohe Delta nahe der Barriere

Warum explodiert beim DO-Put das Delta nahe der Barrier und warum muss der Hedger auf dem Weg nach unten so viele Aktien kaufen?

Das Delta (und auch Gamma und Theta) verändern sich besonders nahe der Barrier sehr stark.

Warum ist das so?

1) Der innere Wert des DO-Puts springt von einem positiven Wert auf Null, wenn die Barrier berührt wird.

2) Je näher die Barrier kommt, desto wahrscheinlicher wird dieses KO-Event.

3) Je kürzer die Restlaufzeit, desto schneller verändern sich die Griechen.

Das extrem hohe Delta nahe der Barriere

Warum explodiert beim DO-Put das Delta nahe der Barrier und warum muss der Hedger auf dem Weg nach unten so viele Aktien kaufen?

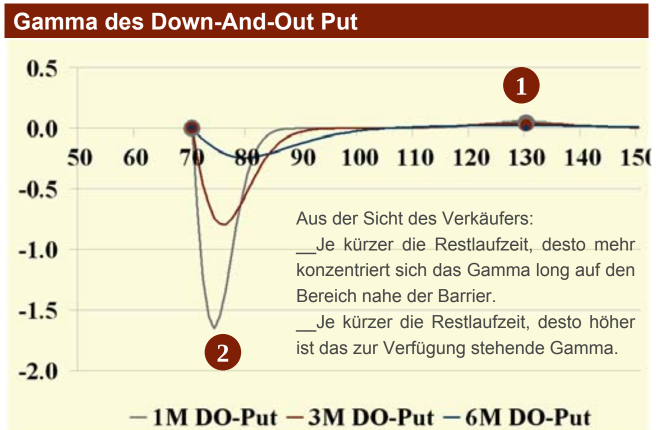
	Delta	Options preis	Innerer Wert
70	-	-	-
70.01	57.96	**0.58**	**59.99**
71	26.52	**45.83**	**59.00**
72	1.93	57.12	58.00
73	-0.92	56.98	57.00
74	-1.00	56.00	56.00
75	-1.00	55.00	55.00
76	-1.00	54.00	54.00

Ein einfaches Beispiel. Restlaufzeit ist 1 Tag. Einen Tick vor der Barrier ist das Delta über 57.

Warum das so sein muss ist einfach zu verstehen, wenn man den Wert des DO-Put mit betrachtet: **Der liegt nämlich bei 0.58 EUR, obwohl der innere Wert bei 59.99 EUR liegt!** Eine deutliche Diskrepanz.

Kommt es nun nicht zum KO-Ereignis (d.h. die Aktie steigt und entfernt sich wieder von der Barrier) muss der Hedger den Wert des DO-Put weiter replizieren. Um den Wert bei einem Spot von 71 EUR replizieren zu können **muss er bei 70.01 also tatsächlich ca. 45 Aktien kaufen, um den Sprung des Optionswertes von 0.58 EUR auf 45.83 EUR finanzieren zu können**.

Down-And-Out Put: Gamma vs. Spot



1) Der Verkäufer ist nahe des Strikes Gamma short.

Er möchte, dass sich der Kurs nicht bewegt bzw. der Put nicht weiter ins Geld läuft.

Er kauft Aktien hoch und gibt sie niedriger wieder.

2) Der Verkäufer ist nahe der Barrier Gamma long.

Er kauft Aktien tief und verkauft diese wieder bei höheren Kursen.

Der Down-And-Out Put und sein Zeitwert

DO-Put: 130% Strike, 70% Barrier, 1.00YR [Ref: 100%]

Preis: **11,90%**

Delta: +0,06

DO-Put: 130% Strike, 70% Barrier, 0.10YR [Ref: 100%]

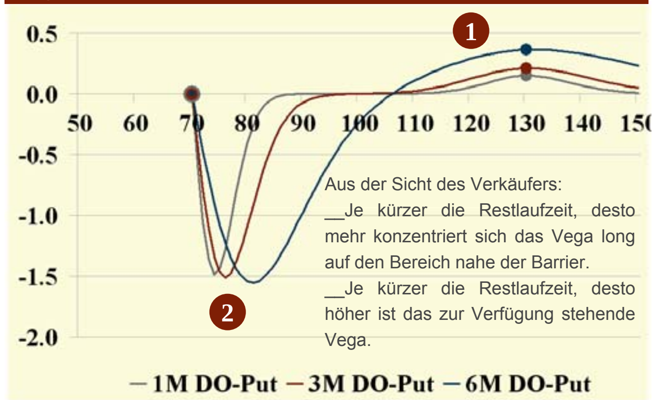
Preis: **27,76%**

Delta: -0,74

- Der DO-Put ist c.p. mehr wert als bei Laufzeitbeginn. Das ist klar, denn der Put hat einen inneren Wert von 30%, dessen Auszahlung nun immer wahrscheinlicher wird.
- Dass der Plain Vanilla Put-Charakter immer mehr dominiert zeigt, dass nun das Delta dem eines Puts näher kommt (das des Plain Vanilla Puts liegt bei -0,99)).
- Schön zu sehen ist, dass der Zeitwert invers wirkt: Der Wert des Puts ist kleiner als sein innerer Wert. Zudem wird der DO-Put c.p. mit dem Verstreichen der Zeit werthaltiger.

Down-And-Out Put: Vega vs. Spot

Vega des Down-And-Out Put



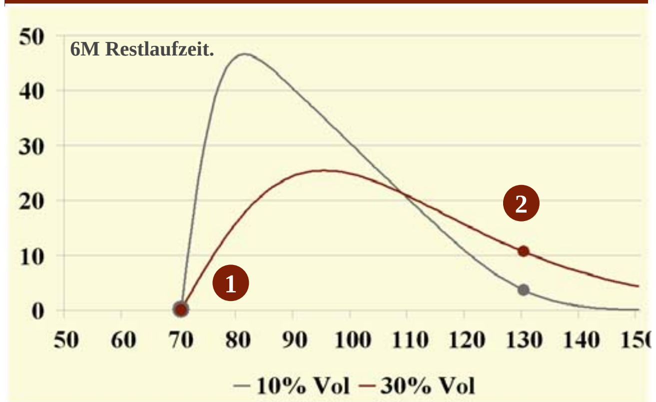
1) Der Hedger ist nahe des Strikes Vega short.
Er profitiert von fallender Volatilität.

2) Der Hedger ist nahe der Barrier Vega long.
Er profitiert von steigender Volatilität.

Die Peaks sind bzgl. des Spots in den Bereichen, in denen auch das Gamma seine Spitze hat.

Down-And-Out Put: Optionspreis vs. Vol

Preisfunktion des DO-Put bei untersch. Vol-Levels



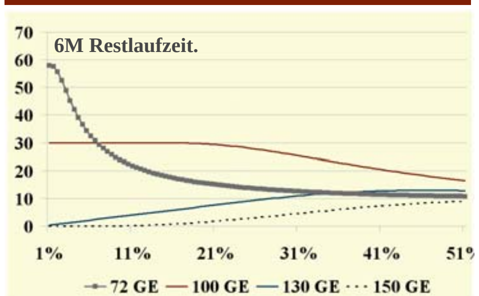
1) Nahe der Barrier zahlt sich geringe Schwankungsbreite aus.
Die Knock-Out Wahrscheinlichkeit ist dann gering.

2) Fern der Barrier verhält sich der DO-Put ähnlich einem Plain Vanilla Put.
Es gilt: je höher die Volatilität, desto höher der Optionswert.

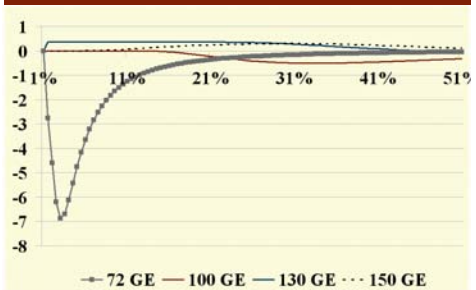
Down-And-Out Put: Volga-Position

Wichtigste Aussage der untenstehenden Grafiken: **In der Nähe der Barrier ist der Käufer des DO-Puts Volga long**, der Verkäufer Volga short. Typischerweise sind Volatilitäten während und/oder nach einem Kursverfall des Basisinstruments (Voraussetzung für das Barrier-Event) extrem reagibel. Ein Hedge mit einem Instrument, dessen Preissensitivität linear in Volatilität ist, würde die Situation nicht verbessern.

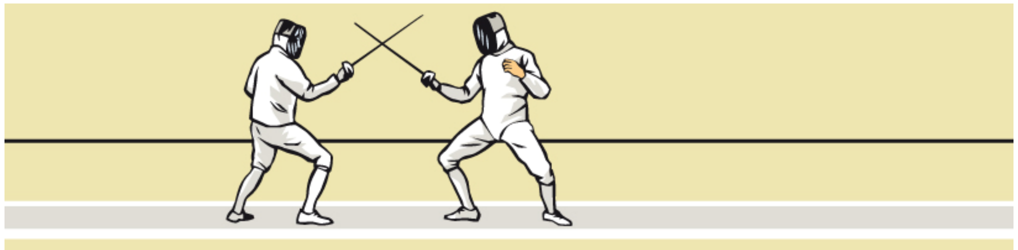
Preis für verschiedene Vol-Levels und Moneyness



Vega für verschiedene Vol-Levels und Moneyness



3. Fazit



Hinter Zertifikaten mit exotischen Optionen steckt viel Arbeit…

Wer Auszahlungsprofile verkauft und bepreist muss wissen:
__Welches Modell für welchen Payoff?
__Wie ist mit dem Modell in der Praxis umzugehen?

Wer die Auszahlungsprofile auch noch aktiv repliziert, muss wissen:
__Wo liegen die Risiken der exotischen Option?
__Delta, Gamma, Theta, Rho, Vanna, Volga, Charme, Colour etc., also auch Risikoparameter höherer Ordnung.
__In welchen Situationen nehmen sie ihren höchsten bzw. niedrigsten Wert ein?
__Was passiert mit der Position, wenn sich der Aktienkurs ändert, wenn sich die Volatilität ändert? Dynamik der Risikoparameter.
__Welche modellexternen Kosten können entstehen?

Und wie immer gilt:

Je mehr der Investor diese Zusammenhänge versteht, desto besser kann er die Chancen und Risiken eines Zertifikates mit exotischen Optionen einschätzen.

Impressum – Sal. Oppenheim jr. & Cie. S.C.A.

Herausgeber

Sal. Oppenheim jr. & Cie. Société en commandite par actions
4, rue Jean Monnet
2180 Luxemburg
Luxemburg
www.oppenheim.lu