



# Auf den Spuren

# von Fisher Black und Myron Scholes

Erfolgreich am Optionsmarkt, Teil 2:

► Im ersten Teil dieser Serie über Optionstrading haben wir uns mit den Grundprinzipien des Binomial-Modells vertraut gemacht. Auf diesen Kenntnissen aufbauend wird im Folgenden die in den 70er Jahren revolutionäre Black-Scholes-Formel vorgestellt, die die Entwicklung des Optionshandels maßgeblich beeinflusst hat.

**K**ann man am Finanzmarkt risikolose Positionen einnehmen? Die Grundannahme von Black und Scholes, die so einfach wie genial ist, beruht auf der Idee, dass sich eine geschickt zusammengestellte Mischung aus dem Basisinstrument und verkauften Optionen kurzfristig nahezu risikolos verhält und durch geeignete Umschichtungsmaßnahmen während der gesamten Restlaufzeit risikolos halten lässt.

## Risikolose Positionen mit Forwards kreieren

Sehr einfach zu verstehen ist die Kombination aus Basisinstrument und Forward (oder einem anderen unbedingten Termingeschäft), um ein risikoloses Portfolio zu erhalten. Ein Forward ist ein unbedingtes Termingeschäft, das den Inhaber zur Abnahme des Underlyings verpflichtet, im Gegensatz zu bedingten Termingeschäften (z.B. Optionsgeschäften), bei welchen er ein Wahlrecht besitzt. Der Inhaber eines Basisinstruments möchte seine Position auflösen. Es findet sich auch ein Käufer für die Wertpapiere, der diese zwar sofort abnehmen, allerdings erst in sechs Monaten bezahlen kann. Welchen Betrag sollte der Verkäufer verlangen? Er wird mindestens den Kurs verlangen, zu dem er sofort verkaufen könnte.

Da er bei sofortiger Glattstellung den Erlös für sechs Monate hätte verzinslich anlegen können, wird er in den Forward-Preis zudem die ihm durch das Termingeschäft entgangenen Zinserträge in Rechnung stellen. Würde er die Zinsen nicht verlangen, würde eine so genannte Arbitragemöglichkeit entstehen, die es in einem effizienten Markt, und von dessen Existenz gehen Optionspreismodelle aus, nicht geben darf.

## Risikolose Positionen mithilfe von Optionen aufbauen

Schwerer ist es, ein Portfolio mit der Hilfe von Optionen

(bedingtes Termingeschäft) gegen Kursbewegungen immun zu machen. Im Gegensatz zum Käufer des Forwards muss der Käufer der Call-Option das Basisinstrument bei gefallen Kursen nicht unbedingt übernehmen (der Käufer besitzt das Recht, er muss keiner Pflicht nachkommen; deswegen auch die Bezeichnung Optionen, die vom lateinischen „optio“, zu deutsch „freie Wahl“, stammt). Dennoch ist es möglich, im kurzfristigen Bereich mit einer geeigneten Anzahl von Basisinstrumenten und verkauften Call-Optionen eine risikolose Position aufzubauen. Ausschlaggebend bei der Absicherung der Position ist die Tatsache, dass sich bei einer Kursbewegung des Basisinstruments auch der Preis der Option ändert – in der Regel in geringerem Ausmaß. Der Betrag, mit dem die Option die Bewegung des Underlyings nachvollzieht wird durch das Delta ausgedrückt, das schon im letzten Artikel angesprochen wurde. Beträgt das Delta beispielsweise 0,5, so zieht eine Bewegung des Basisinstruments um einen Punkt eine Veränderung des Optionspreises um einen halben Punkt nach sich.

### long Aktie, short Call = positiver Ertrag zum Marktzins (bei Deltaneutralität)

Eine Position aus den Komponenten long Aktien und short Calls ergibt bei Deltaneutralität einen Ertrag, der dem Marktzins entspricht.

Will man seine Position risikolos halten, müssen in diesem Fall pro gekauftem Basisinstrument zwei Call-Optionen verkauft werden. Damit wäre man kurzfristig abgesichert. Will man allerdings über einen längeren Zeitraum gehedged sein, muss man die Tatsache berücksichtigen, dass die Sensitivität von Underlying- und Optionskurs kein konstanter Faktor ist. Die Stärke der Wechselwirkung verändert sich: Je weiter der Call ins Geld läuft, desto stärker gleichen sich die Bewegungen der beiden Instrumente an (Delta größer 0,5 bis 1,0); je weiter der Underlyingkurs unter den Basispreis fällt, desto loser wird die Verbindung (Delta kleiner 0,5 bis 0,0). Bei steigendem Aktienkurs muss folglich die Anzahl der Optionen verringert, bei fallendem Kurs erhöht werden, um gegenüber Kursveränderungen risikolos zu bleiben.

### Der Grundgedanke: „No free lunch!“

Zieht man nun ein derartiges risikoloses Portfolio unter der Bedingung heran, dass es den gleichen Zinsertrag erwirtschaftet wie ein Geldmarktkonto (um Arbitragemöglichkeiten zu unterbinden), kann man eine partielle Differentialgleichung ableiten, aus der sich die Black-Scholes-Formel ergibt. Vereinfacht

### Arbitrage

Der Prozess, bei dem Preisunterschiede zwischen gleichwertigen Objekten an verschiedenen Marktplätzen ausgenutzt und schließlich beseitigt werden. Ein simples Beispiel bietet die Effektenarbitrage: Gelegentlich kommt es vor, dass beispielsweise eine Aktie am Finanzmarkt A billiger erworben werden kann als am Finanzmarkt B. Ein Arbitrageur wird sofort reagieren und die Aktie in A kaufen und B verkaufen. Diese Vorgehensweise bewirkt aufgrund höherer Nachfrage steigende Kurse am Börsenplatz A und wegen steigendem Angebot fallende Notierungen in B. Die Arbitrage wird solange aktiv bleiben, bis sich die Kurse angeglichen haben.



heißt das, dass die Ertragsstruktur (Payoff) einer (hier) europäischen Call-Option durch andere Instrumente (Finanzierung der Position durch Kauf des Basisinstruments auf Kredit) exakt replizieren lässt. Man betrachtet somit die Materie nur von einem anderen Standpunkt aus, indem man das risikolose Portfolio in seine Bausteine zerlegt und neu zusammenfügt.

**short Call = positiver Ertrag zum Marktzins, short Aktie**  
**long Call = negativer Ertrag zum Marktzins, long Aktie**

Nach Umstellung der Formel: Eine long Call Position entspricht der Kombination aus long Aktien finanziert durch Kreditaufnahme (negativer Marktzins!). Das ist die Grundlage der Optionspreistheorie.

Unterscheidet sich der Wert der Option von dem des Duplikationsportfolios, so würden die bereits erwähnten risikolosen Arbitragemöglichkeiten (in der Börsensprache „free lunch“ genannt) entstehen, die der Markt sofort ausnutzen und somit das Gleichgewicht zwischen den beiden theoretisch äquivalenten Positionen wieder herstellen würde. Der Ertrag der Positionen kann nach der Theorie der effizienten Märkte nicht höher als der aktuelle Geldmarktzins sein. Bei der Bildung der äquivalenten Position ist es von besonderer Bedeutung, die richtige Anzahl von Basisinstrumenten und die korrekte Kreditgröße in Anspruch zu nehmen. Diese Werte zu bestimmen ist unter anderem Aufgabe der Black-Scholes-Formel.

## Das Modell funktioniert nur unter bestimmten Voraussetzungen...

Die Prämissen des Black-Scholes-Modells entsprechen weitestgehend denen des Binomial-Modells. Das ist nicht weiter verwunderlich, da die Motivation für die Formulierung des Binomial-Modells die leicht verständliche Darstellung des Black-Scholes-Modells war. Das idealisierte Marktgeschehen in der Black-Scholes-Welt bedeutet im Einzelnen:

- Es gilt das „law of one price“: der Markt bietet keine Arbitragechancen
- Wir nehmen an, dass die Märkte zu jedem Zeitpunkt geöffnet sind und Handel stattfindet
- Es handelt sich um einen reibungslosen Markt, d.h.
  - selbst größere Volumina können problemlos und ohne Auswirkung auf den Kurs platziert werden
  - Es werden weder Transaktionskosten, Steuern noch sonstige Kosten berücksichtigt
  - jeder Marktteilnehmer kann beliebig große Kredite aufnehmen und ein Zinssatz gilt für alle Transaktionen
  - Die handelbaren Wertpapiere stehen in beliebig teilbaren Einheiten zur Verfügung
  - Die Marktteilnehmer agieren als „Preisnehmer“
- Der Zinssatz  $r$  bleibt während der Dauer jedes Intervalls konstant
- Die Volatilität des Basiswertes wird während der gesamten Laufzeit als konstant angenommen
- Kursveränderungen des Basiswertes folgen einem stochastischen Prozess (d.h.: der nächste Kurs wird in keiner Weise vom aktuellen oder vorhergehenden beeinflusst)
- Es treten keine Kurssprünge (Gaps) zwischen zwei aufeinanderfolgenden Preisen auf

Das Black-Scholes-Modell baut außerdem auf eine weitere wichtige Feststellung auf, die wir bereits bei Cox-Ross-Rubinstein kennen gelernt haben: Wenn über den Underlying-

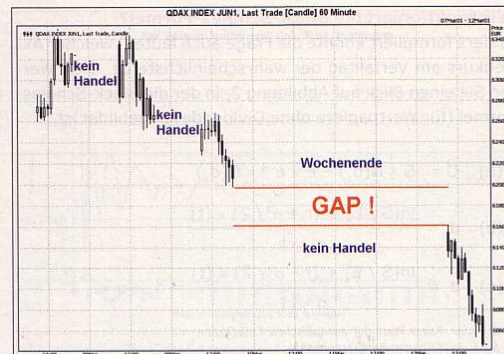


Abbildung 1: Börseninteressierte werden schnell feststellen: Die Annahmen des Black-Scholes-Modells sind mit den realen Bedingungen nicht vereinbar. Wie man im Chart sehen kann, sind die Börsen nicht ständig geöffnet, zumindest am Wochenende hat man keine Chance, an der Börse aktiv zu werden. Auch die Prämisse nicht existenter Kurslücken muss verworfen werden, was uns vor allem im vergangenen halben Jahr vom Markt gelehrt wurde (in der Regel nach unten). Man benötigt auch keine komplizierten mathematischen Formeln, um zum Schluss zu kommen, dass die Volatilität kein konstanter Parameter sein kann – die Kursbewegungen von Stunde zu Stunde (betrachten Sie die Länge der Kerzen) sind auf dem abgebildeten 60-Minuten-Chart nicht identisch, sondern einmal kleiner, einmal größer.

kurs am Verfalltag Gewissheit bestünde, so wäre der Optionswert entweder gleich Null (beim Call: wenn das Underlying niedriger als der Basispreis der Option notiert; Put analog) oder die Differenz zwischen Underlyingkurs und Basispreis (wenn  $S > E$ ).

Rekapitulieren wir die Gleichung für den Payoff sowie die für den Preis des europäischen Calls, die wir beide bereits im letzten Artikel kennen gelernt haben:

$$\text{Payoff des Calls am Verfalltag} = \max[0, (S-E)]$$

Wenn wir davon ausgehen, dass der aktuelle Kurs des Basisinstruments auch der ist, den das Wertpapier am Verfalltag einnimmt (wir also mit einer Wahrscheinlichkeit von 100 Prozent erwarten, dass dies der exakte Kurs sein wird), kann die Formel erweitert werden:

$$\text{Payoff des Calls am Verfalltag} = \max[0, e^{-rt}(S-E)]$$

Im Grunde genommen könnten wir die Black-Scholes-Formel auf den Teil  $e^{-rt}(S-E)$ , den diskontierten inneren Wert der Option am Verfalltag reduzieren, wenn wir den zukünftigen Kursverlauf des Basisinstruments kennen würden. Zum Beispiel, wenn sich der Underlyingkurs bis Ende der Laufzeit gar nicht mehr bewegen würde, d.h. eine Volatilität (Standardabweichung) des Basisinstruments von Null vorliegen würde.

Da dies in der Realität nicht der Fall ist, muss man sich auf eine andere Art und Weise mit dem Problem der unbekannten zukünftigen Standardabweichung der Kursentwicklung arrangieren. Black und Scholes bieten eine Lösung, in der sie grundsätzlich jeden Underlyingkurs für möglich halten, die verschiedenen Möglichkeiten jedoch mit Wahrscheinlichkeiten versehen und so einen gewichteten statistischen Mittelwert des wahrscheinlichen Endwertes der Option erhalten. Den Grad der Gewichtung erhalten sie aus der (historischen) Normalverteilung der Renditen des Underlyings.

Der Optionswert stimmt bei diesem Ansatz mit dem Maximum aus Null und  $e^{-rt}(S-E)$  überein, wobei der Kurs des Basisinstruments dem statistischen Mittelwert der Normalverteilung des Kurses entspricht.



Wahrscheinlichkeit zu interpretieren (im engeren Sinn als „Ausübungswahrscheinlichkeit“). Die mathematische Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist sehr aufwendig, deshalb bedient man sich der Wahrscheinlichkeitstabelle, in der den „d“-Werten (die mittlere absolute Abweichung, eben die Volatilität) jeweils eine Eintrittswahrscheinlichkeit zugeordnet wird.

In unserem Beispiel nimmt  $d_1$  den Wert 0,7612 ein. Um den zugehörigen Wahrscheinlichkeitswert in der Tabelle (Abbildung 4) zu finden, muss man auf der vertikalen Skala den Wert 0,7 suchen, das ist die erste Dezimalstelle unseres Zwischenergebnisses. Da die zweite Dezimalstelle auch den Wert 6 hat, geht man horizontal bis zur sechsten Spalte (0,06). Das Ziel ist nun fast erreicht. Da  $d_1$  größer ist als 0,76 sucht man in der Tabelle zudem den nächst höheren Wert heraus, der in der Folgespalte zu finden ist (0,77). An einer Stelle zwischen diesen beiden Werten befindet sich das Ergebnis, das (z.B.) durch lineare Interpolation der beiden Punkte ermittelt werden kann.

Bei einem Wert von 0,7612 beträgt  $N(d_1)$  also 0,77676.

$$C = 110 \times 0,77676 - 100 \times e^{-0,04 \times 2,0} \times N(d_2)$$

#### Schritt 4: Berechnung von $N(d_2)$ mit Formel c

$N(d_2)$  gibt an, wie wahrscheinlich eine Ausübung der europäischen Call Option am Laufzeitende ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird in einer Spanne von 0 (keine Ausübung) bis 1 (Ausübung) angegeben. Bei diesem Schritt geht man prinzipiell genauso vor wie bei Schritt 3. Durch Umstellung der Formel kann man sich die Arbeit jedoch wesentlich erleichtern (siehe Abbildung 5).

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 - \sigma \times \sqrt{t} = \\ &= 0,7612 - 0,2 \times \sqrt{2} = \\ &= 0,4784 ; \end{aligned}$$

Abbildung 5: Die Berechnung von  $d_2$ . Der Wert von  $N(d_2)$  wird wie der von  $N(d_1)$  ermittelt.

Eine deep in-the-money Option weist ein  $N(d_2)$  nahe 1 auf, bei einer out-of-the-money Option ist  $N(d_2)$  relativ klein.

$$C = [110 \times 0,77676] - [100 \times e^{-0,04 \times 2,0} \times 0,683824]$$

#### Schritt 5: Fair Value der europäischen Option

Da alle Glieder der Formel berechnet wurden, kann nun der faire Optionskurs ermittelt werden (Abbildung 6).

$$\begin{aligned} C &= S \times N(d_1) - E \times e^{-rt} \times N(d_2) = \\ &= [110 \times 0,77676] - [100 \times e^{-0,04 \times 2,0} \times 0,683824] = \\ &= 85,44 - 63,12 = \\ &= 22,32 ; \end{aligned}$$

Abbildung 6: Berechnung des fairen Optionspreises.

#### Mit zunehmenden Steps konvergieren die Binomialwerte gegen die Black-Scholes-Werte

Vergleicht man die Ergebnisse der beiden Modelle, fallen die nahezu identischen Resultate auf. Aus welchen Gründen kommt es zu dieser Deckung, bzw. stellt sich die Frage, ob

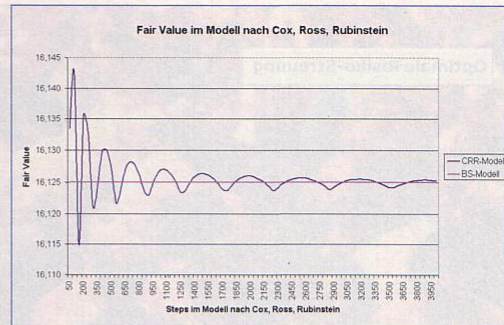


Abbildung 7: Die Graphik veranschaulicht, wie sich der Fair Value des Binomial-Modells in Abhängigkeit zu den verwendeten Steps verhält. Es wird deutlich, dass sich dieser Preis mit zunehmenden Steps gegen den Black-Scholes Wert konvergiert.

die beiden Modelle nicht zum selben Ergebnis kommen sollten? Sobald wir das Binomial-Modell auf unendlich viele Perioden ausdehnen nimmt dessen Verteilung eine zur Standardnormalverteilung nahezu ebenbildliche Gestalt an. Die Standardnormalverteilung (ausgedrückt durch Standardabweichung und Mittelwert) steht im Mittelpunkt der Black-Scholes-Formel, denn sie bestimmt über die Höhe der Gewichtung der einzelnen Faktoren. Folglich ähneln die Ergebnisse des Cox-Ross-Rubinstein-Modells denen des Black-Scholes-Modells.

#### Fazit

Der faire Wert einer Option ergibt sich im Black-Scholes-Modell aus der um den Zinsvorteil verminderten Differenz aus erwartetem Underlyingkurs und erwartetem Bezugspreis. Die Wahrscheinlichkeit der Ausübung wird durch den Wert der Standardnormalverteilung festgelegt. Folglich hängt der Optionspreis in diesem Modell von den Faktoren

- aktueller Underlyingkurs
- Basispreis
- Laufzeit
- Risikoloser Zinssatz und der
- Kursvolatilität

ab. Die Voraussetzung der „Risikoneutralität aller Marktteilnehmer“ (siehe Teil 1) wird somit elegant ausgeschaltet, da die Risikoeinstellung der Marktteilnehmer und deren subjektiv erwartete Rendite den Optionspreis nur noch indirekt beeinflussen, nämlich über die Entwicklung des Underlyingkurses. Die Formel beruht infolgedessen, abgesehen von der Volatilität, ausschließlich auf unmittelbar am Markt beobachtbaren Größen. Das ist der Grund für ihren großen Erfolg.

#### Ausblick

Nachdem in diesem Artikel die Funktionsweise, Prämissen sowie Vor- und Nachteile von Optionspreismodellen dargelegt wurden, kann man nun dazu übergehen, etwas komplexere Handelsstrategien zu entwickeln. Der nächste Teil wird sich deshalb damit beschäftigen, wie die Kennzahlen der Modelle für renditestarke Strategien an den Optionsmärkten eingesetzt werden können.

Andreas Günther, Stephan Krügel,  
Sal. Oppenheim Retail Products



Wahrscheinlichkeit zu interpretieren (im engeren Sinn als „Ausübungswahrscheinlichkeit“). Die mathematische Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist sehr aufwendig, deshalb bedient man sich der Wahrscheinlichkeitstabelle, in der den „d“-Werten (die mittlere absolute Abweichung, eben die Volatilität) jeweils eine Eintrittswahrscheinlichkeit zugeordnet wird.

In unserem Beispiel nimmt  $d_1$  den Wert 0,7612 ein. Um den zugehörigen Wahrscheinlichkeitswert in der Tabelle (Abbildung 4) zu finden, muss man auf der vertikalen Skala den Wert 0,7 suchen, das ist die erste Dezimalstelle unseres Zwischenergebnisses. Da die zweite Dezimalstelle auch den Wert 6 hat, geht man horizontal bis zur sechsten Spalte (0,06). Das Ziel ist nun fast erreicht. Da  $d_1$  größer ist als 0,76 sucht man in der Tabelle zudem den nächst höheren Wert heraus, der in der Folgespalte zu finden ist (0,77). An einer Stelle zwischen diesen beiden Werten befindet sich das Ergebnis, das (z.B.) durch lineare Interpolation der beiden Punkte ermittelt werden kann.

Bei einem Wert von 0,7612 beträgt  $N(d_1)$  also 0,77676.

$$C = 110 \times 0,77676 - 100 \times e^{-0,04 \times 2,0} \times N(d_2)$$

#### Schritt 4: Berechnung von $N(d_2)$ mit Formel c

$N(d_2)$  gibt an, wie wahrscheinlich eine Ausübung der europäischen Call Option am Laufzeitende ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird in einer Spanne von 0 (keine Ausübung) bis 1 (Ausübung) angegeben. Bei diesem Schritt geht man prinzipiell genauso vor wie bei Schritt 3. Durch Umstellung der Formel kann man sich die Arbeit jedoch wesentlich erleichtern (siehe Abbildung 5).

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1 - \sigma \times \sqrt{t} = \\ &= 0,7612 - 0,2 \times \sqrt{2} = \\ &= 0,4784 ; \end{aligned}$$

Abbildung 5: Die Berechnung von  $d_2$ . Der Wert von  $N(d_2)$  wird wie der von  $N(d_1)$  ermittelt.

Eine deep in-the-money Option weist ein  $N(d_2)$  nahe 1 auf, bei einer out-of-the-money Option ist  $N(d_2)$  relativ klein.

$$C = [110 \times 0,77676] - [100 \times e^{-0,04 \times 2,0} \times 0,683824]$$

#### Schritt 5: Fair Value der europäischen Option

Da alle Glieder der Formel berechnet wurden, kann nun der faire Optionskurs ermittelt werden (Abbildung 6).

$$\begin{aligned} C &= S \times N(d_1) - E \times e^{-rt} \times N(d_2) = \\ &= [110 \times 0,77676] - [100 \times e^{-0,04 \times 2,0} \times 0,683824] = \\ &= 85,44 - 63,12 = \\ &= 22,32 ; \end{aligned}$$

Abbildung 6: Berechnung des fairen Optionspreises.

#### Mit zunehmenden Steps konvergieren die Binomialwerte gegen die Black-Scholes-Werte

Vergleicht man die Ergebnisse der beiden Modelle, fallen die nahezu identischen Resultate auf. Aus welchen Gründen kommt es zu dieser Deckung, bzw. stellt sich die Frage, ob

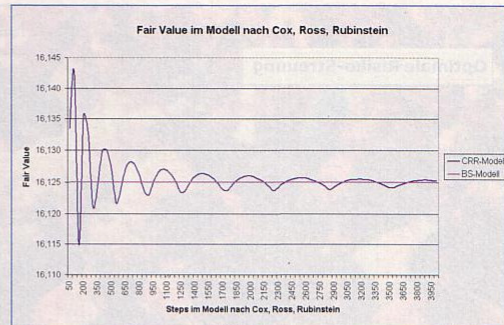


Abbildung 7: Die Graphik veranschaulicht, wie sich der Fair Value des Binomial-Modells in Abhängigkeit zu den verwendeten Steps verhält. Es wird deutlich, dass sich dieser Preis mit zunehmenden Steps gegen den Black-Scholes Wert konvergiert.

die beiden Modelle nicht zum selben Ergebnis kommen sollten? Sobald wir das Binomial-Modell auf unendlich viele Perioden ausdehnen nimmt dessen Verteilung eine zur Standardnormalverteilung nahezu ebenbildliche Gestalt an. Die Standardnormalverteilung (ausgedrückt durch Standardabweichung und Mittelwert) steht im Mittelpunkt der Black-Scholes-Formel, denn sie bestimmt über die Höhe der Gewichtung der einzelnen Faktoren. Folglich ähneln die Ergebnisse des Cox-Ross-Rubinstein-Modells denen des Black-Scholes-Modells.

#### Fazit

Der faire Wert einer Option ergibt sich im Black-Scholes-Modell aus der um den Zinsvorteil verminderten Differenz aus erwartetem Underlyingkurs und erwartetem Bezugspreis. Die Wahrscheinlichkeit der Ausübung wird durch den Wert der Standardnormalverteilung festgelegt. Folglich hängt der Optionspreis in diesem Modell von den Faktoren

- aktueller Underlyingkurs
- Basispreis
- Laufzeit
- Risikoloser Zinssatz und der
- Kursvolatilität

ab. Die Voraussetzung der „Risikoneutralität aller Marktteilnehmer“ (siehe Teil 1) wird somit elegant ausgeschaltet, da die Risikoeinstellung der Marktteilnehmer und deren subjektiv erwartete Rendite den Optionspreis nur noch indirekt beeinflussen, nämlich über die Entwicklung des Underlyingkurses. Die Formel beruht infolgedessen, abgesehen von der Volatilität, ausschließlich auf unmittelbar am Markt beobachtbaren Größen. Das ist der Grund für ihren großen Erfolg.

#### Ausblick

Nachdem in diesem Artikel die Funktionsweise, Prämissen sowie Vor- und Nachteile von Optionspreismodellen dargelegt wurden, kann man nun dazu übergehen, etwas komplexere Handelsstrategien zu entwickeln. Der nächste Teil wird sich deshalb damit beschäftigen, wie die Kennzahlen der Modelle für renditestarke Strategien an den Optionsmärkten eingesetzt werden können.

Andreas Günther, Stephan Krügel,  
Sal. Oppenheim Retail Products