PORTFOLIO SELECTION

SEMINARARBEIT

Im Rahmen des ABWL-Proseminars
Mit dem Generalthema
„Aktien- und Unternehmensbewertung“
Wintersemester 2004/2005

eingereicht bei

Prof. Dr. Hans G. Bartels

Fachbereich Wirtschaftswissenschaften
Professur für Betriebswirtschaftslehre,
insbesondere Operations Research
Johann Wolfgang Goethe – Universität
Frankfurt am Main

Autor: Stephan Krügel

INHALTSVERZEICHNIS

I.) Portfolio Selection – Markowitz Theorie vom Investieren in risikobehaftete Kapitalanlagen

„I was struck with the notion that you should be interested in risk as well as in return.“
Nobelpreisträger Harry M. Markowitz

A) Ziel des Portfolio-Selektionsmodells

Die Rolle der Wertpapieranlage für den privaten Vermögensaufbau – auch und vor allem im Hinblick auf private Altersvorsorge - gewinnt seit Jahren kontinuierlich an Bedeutung. Der Anleger kann hierzu aus einer sehr großen Vielfalt an unterschiedlichen Investmentmöglichkeiten wählen. Deshalb ist es wichtig, ein Depot nicht zufällig, sondern strukturiert zu gestalten, um ein gewünschtes Rendite-Risiko-Profil möglichst exakt abzubilden zu können.[1]

In diesem Zusammenhang spielt die bereits in den 50er Jahren entwickelte Portfolio-Selection-Theorie die zentrale Rolle. Mit einem Portfolio-Selektionsmodell, das unter Berücksichtigung der Renditeerwartung des Anlegers das Risikoprofil der Anlage identifiziert, können Ertrags- und Risikostrukturen optimiert werden.
Im Vordergrund steht die strukturierte Auswahl und vor allem die effiziente Kombination von Wertpapieren. Neben der Rendite wird dabei stets das Risiko des Investments betrachtet: Es muss abgewägt werden zwischen der Chance auf Ertrag und dem Risiko eines Verlustengagements.[2]

B) Optimale Rendite-Risiko-Strukturen identifizieren

Harry M. Markowitz, der für 1990 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften verliehen bekam, zeigte bereits zu Anfang der 50er Jahre, dass es – zumindest theoretisch – sehr einfach möglich ist, das Ertrags-Risiko-Relation eines Wertpapiers durch die Aufnahme in ein Portfolio zu verbessern.
Denn bildet man Portfolios aus Wertpapieren, so zeigt sich, dass das Streuungsrisiko dieses Portfolios wesentlich geringer ist als das durchschnittliche Streuungsrisiko der einbezogenen einzelnen Wertpapiere Die hohen Schwankungen einzelner Wertpapiere können sich zusammengenommen kompensieren. Man spricht hier von risikoreduzierender Diversifikation.

---

[1] „Auf die Streuung kommt es an - Vermögensaufbau und Strukturierung mit Immobilien, Aktien und Fonds“, Stuttgarter Volksbank, Internet-Abruf vom 14.10.2004, http://www.stuttgarter-volksbank.de/__C1256C15003983A1.nsf/(GrafikAnhaenge)/PRESSE2.PDF/$File/PRESSE2.PDF
[2] „Against the Gods – The remarkable story of risk“, Bernstein, Peter L., Wiley Finance, New York, 1998, Seite 257

Die so genannte Portfolio-Selection-Theorie stellt das Instrumentarium zur Verfügung, bei gegebener Rendite- und Risikoerwartung theoretisch optimale Portfolios zusammenzustellen.

Im Rahmen dieser Arbeit sollen die Prämissen sowie Grundlagen dieses Konzeptes, mögliche Schwachstellen und Lösungsansätze erläutert werden. Es wird gezeigt, dass die modelltheoretischen Überlegungen Markowitz‘ den Kern eines strukturierten Vermögensaufbaus darstellen und damit – trotz vorhandener Schwachstellen - in hohem Maße praxisrelevant sind.

II.) Vorgehensweise bei der Zusammenstellung von Portfolios

A) Intuitive Vorgehensweise

Die überwiegende Mehrzahl der Anleger entscheidet sich für das Investment, das eine möglichst hohe Rendite erwarteten läßt. Direkt nach dem Wunsch hoher Erträge wird der durchschnittliche Anleger die Sicherheit seines investierten Geldes hinterfragen. Zusätzlich sollte eine hohe Liquidität der Anlageform gewährleistet sein. Die drei Kriterien Ertrag, Anlagesicherheit und Liquidität[3] bilden das so genannte „magische Dreieck“ der Geldanlage[4].

Eine Maximierung aller drei Größen ist bei keiner Anlageform möglich. Prinzipiell gilt:

- Je höher die Verfügbarkeit (Liquidität)
- und je höher die Sicherheit der Anlageform
- desto geringer muss der erwartete Ertrag angesetzt werden.

Im Fachjargon spricht man auch vom „Trade-Off“ zwischen Ertrag und Risiko.

Bevor der Anleger also beginnt, Investitionsentscheidungen durchzuführen, sollte er im Hinblick auf die Optimierung seiner Rendite-Risiko-Struktur die Antworten auf einige zentrale Fragen parat haben:

1) Welche Rendite wird mit den Investments angepeilt? (Renditeerwartung)
2) Muss eine Mindestverzinsung erwirtschaftet werden?[5]
3) Wie lange ist die Dauer des Anlagehorizontes? (Liquidität)
4) Welches Risiko ist man bereit einzugehen? (Risikoneigung)

---

[3] „Inventing Money – The story of Long-Term Capital Management and the legends behind it“, Dunbar, Nicholas, Wiley Verlag, New York, 2001, Seite 117 ff.; Der Hedge-Fund LTCM musste 1997 Milliardenverluste aufgrund von Positionen in illiquiden Assets hinnehmen.

[4] „Eine Einführung in die Portfolio Selection Theory“, Abruf vom 14.10.2004, http://www.stw-boerse.de/techno/portfolio/00.htm

[5] Versicherungen sind eine der gewichtigsten Anlegergruppen am Kapitalmarkt. Sie sind z.B. gezwungen eine Mindestrendite zu erwirtschaften, beispielsweise für die Zahlungsverpflichtungen, die sich aus Lebensversicherungen ergeben.

B) Traditionelles und modernes (portfolio-theoretisches) Anlagemanagement

Die klassische Anlagephilosophie geht von der einzelnen Anlagemöglichkeit aus. Betrachtet wird das Universum aus festverzinslichen Wertpapieren, Aktien, Anlagezertifikaten etc. und es wird versucht, die „beste“ Investmentmöglichkeit zu identifizieren.

Hierzu bedient man sich in der Regel Methoden der fundamentalen oder technischen Analyse.

Nach eingehender Untersuchung wird festgestellt, welche Rendite von einem potenziellen Investment zu erwarten ist. Anschließend wird diese Ertragsschätzung des einzelnen Wertpapiers mit dem Potenzial aller anderen untersuchten Anlagemöglichkeiten verglichen.

Diese Vorgehensweise entspricht dem Stock-Picking, dem Versuch, die momentan beste Aktie, Anleihe etc. zu finden, bzw. zu erwerben.[6]

Allerdings besteht bei diesem Prozedere – auch bei richtiger Anwendung und der nötigen Portion Glück - die große Gefahr, dass das Depot nach einer gewissen Zeit unstrukturiert, d.h. nicht optimal, oder mit Markowitz zu sprechen, „nicht effizient“ ist.

Die Zusammenstellung wir mehr oder weniger zufällig sein und im Regelfall nicht der optimalen Rendite-Risiko-Kombination entsprechen.

Im modernen Anlagemanagement berücksichtigt man aus diesem Grund neben diesen klassischen Methoden ebenbürtig die der Portfolio-Selection-Theorie, die zwei weitere wesentliche Aspekte die Ertragschancen eines Wertpapiers betreffend klären will:

- Welches Risiko ist mit einem Engagement in dem Wertpapier verbunden?
- Wie wirkt sich ein Kauf des Wertpapiers auf die Rendite-Risiko-Struktur des gesamten, bereits bestehenden Portfolios aus?

III.) Grundbausteine der Portfolio-Theorie

A) Annahme: Wertpapierkurse entwickeln sich zufällig

Dabei ist das Verständnis für die Art, mit der sich Wertpapierkurse entwickeln, von zentraler Bedeutung.[7]

Markowitz geht davon aus, dass sich die Renditen an den Kapitalmärkten zufällig entwickeln („Random Walk“) und einer symmetrischen Normalverteilung folgen.

---

[6] „Millionen mit Optionen – Gezielter Vermögensaufbau mit Aktien- und Indexoptionen“, Schaeffer, Bernie, FinanzBuch Verlag, München 1999, Seite 25 ff.

[7] „Dynamic Hedging – Managing Vanilla and Exotic Options“, Taleb, Nassim, Wiley Finance, New York, 1997, S.415; „Einführung in die Statistik der Finanzmärkte“, Franke, Härdle, Hafner, Springer Verlag, Berlin, 2004, Seite 139 ff.

Das hat den Vorteil, dass sich durch die Angabe von lediglich zwei Parametern – nämlich Erwartungswert und Standardabweichung – eine vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung mit allen möglichen Umweltzuständen darstellen läßt.
Einer erwarteten Rendite kann auf diese Weise sofort das Risiko und die Eintrittswahrscheinlichkeit zugewiesen werden.

Die Überlegung macht Sinn, denn interpretiert man das Risiko eines Wertpapiers als Möglichkeit, dass es in Zukunft Renditen geben wird, die vom Erwartungswert abweichen, so ist es nachvollziehbar, sich der Standardabweichung (Wurzel aus der Varianz) als Risikomaß zu bedienen. Volatilität ist am Kapitalmarkt ein gängiges Synonym für die statistische Standardabweichung.

Betrachtet man eine idealtypische Normalverteilung so ergibt sich, daß die Vorgehensweise plausibel ist. Je höher der erwartete Ertrag angesetzt, desto mehr Schwankung, bzw. Unsicherheit muss dafür in Kauf genommen werden.

B) Zwei-Parameter Ansatz zur Beschreibung des Entscheidungsproblems der Portfolio-Theorie[8]

Die Lösung des Entscheidungsproblems in der Portfolio-Theorie kann mit den zwei Parametern erwartete Rendite und Standardabweichung von statten gehen. Ein erster wichtiger Schritt besteht also darin, die erwartete Rendite und deren Standardabweichung quantitativ, d.h. zahlenmäßig richtig zu erfassen.
Da es sich nicht um unmittelbar und objektiv am Markt erkennbare Größen handelt, müssen die Parameter geschätzt werden.

C) Schätzung von erwarteter Rendite und erwartetem Risiko: Erwartungswert und Standardabweichung der Rendite

Es bieten sich grundsätzlich zwei Vorgehensweisen zur Schätzung der Parameter an: Die qualitative und die empirische.
Erfolgt die Schätzung auf rein qualitativer Ebene, so nutzt der Entscheider die ihm zur Verfügung stehenden Informationen, um eine subjektive Einschätzung der beiden Größen abzuleiten.
Andererseits besteht die Möglichkeit, die Kennzahlen aus empirischen (historischen) Renditedaten zu ermitteln. Hierzu werden aus einer Stichprobe von bereits in der

[8] „Finanzierung“, Gerke, Wolfgang, Bank, Matthias, Verlag Kohlhammer, Stuttgart, 1998, Seite 174 ff.

Vergangenheit realisierten Renditewerten der Stichprobenmittelwert (als Schätzer für den Erwartungswert) und die Stichprobenstandardabweichung berechnet.

Erwartungswert der Rendite

Der arithmetische Mittelwert, der mit dem griechischen Buchstaben µ („mü“) bezeichnet wird, dient bei dieser Vorgehensweise als Schätzer für die erwartete Rendite. Er definiert sich als Summe der beobachteten Renditen dividiert durch die Anzahl der Beobachtungen.

$$\mu^r = E(r) = \frac{1}{n} * \sum_{i=1}^{n} r_i$$

$$mit \quad r_i = \ln\left(\frac{Kurs_i}{Kurs_{i-1}}\right)$$

r_i : *Log-Rendite von Periode i − 1 auf Periode i*

μ^r : *arithmetische Mittel der Renditezeitreihe*

$E(r)$: *Erwartungswert der Rendite*

Risikoschätzung mittels Standardabweichung

Je höher das Risiko eines Anlagemediums ist, um so stärker schwankt die Wertentwicklung im Zeitverlauf. Das Instrument um diese Unregelmäßigkeit oder Flatterhaftigkeit der Renditeentwicklungen um ihren Mittelwert zu messen ist die Standardabweichung der Renditen, am Kapitalmarkt auch als (historische) Volatilität bezeichnet. Die Standardabweichung wird mit dem griechischen Buchstaben Sigma (σ) abgekürzt.

$$\sigma^r = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r})^2}$$

σ^r : *Standardabbweichung der Rendite*

r_i : *Periodenrendite zum Zeitpunkt i* (logarithmiert)

$\bar{r}$: *Durchschnittliche Rendite im betrachteten Zeitraum*

n : *Anzahl der betrachteten Perioden*

Sigma misst, wie stark die einzelnen Renditen der Perioden um den Mittelwert (Erwartungswert der Rendite) schwanken. Es handelt sich folglich um die erwartete Schwankung um den Erwartungswert.

Die quadrierte Standardabweichung, also Sigma-Quadrat wird als Varianz bezeichnet. Die Varianz lässt sich zwar leichter errechnen, mit Hilfe der Standardabweichung lassen sich aber "griffigere" Aussagen bezüglich der Risikohaftigkeit einer Anlageform treffen.

Interpretation der Standardabweichung

Die Standardabweichung gibt an, in welchem Umfang sich die nächste Periodenrendite mit 68% Wahrscheinlichkeit bewegen wird. Zwei Standardabweichung decken eine Verteilungsmasse von 96,7% ab, drei Standardabweichungen schließen eine größere Bandbreite an Möglichkeiten, geben deren Realisierung jedoch mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,3% an.[9]

Die Standardabweichung ist ein symmetrisches Risikomaß. Das heißt, dass anders als beim gängigen Risikoverständnis auch positive Abweichungen vom Erwartungswert als Risiko interpretiert werden.

D) Anwendung von Mittelwert und Standardabweichung unterstellen Gültigkeit der Normalverteilungsannahme

Die Anwendung von Mittelwert und Standardabweichung setzen voraus, dass die zugrundeliegenden Datenreihen auch wirklich normalverteilt sind. Bei Unterstellung der Normalverteilung der Renditen müssen allerdings kritische Prämissen beachtet werden. Denn die Normalverteilungsannahme ist nur dann haltbar, wenn die zugrunde liegende empirische Renditeverteilung, aus der die Parameter gewonnen wurden, stationär ist.

Stationär bedeutet, dass sich Mittelwert (Erwartungswert) und Standardabweichung im Zeitablauf nicht ändern.

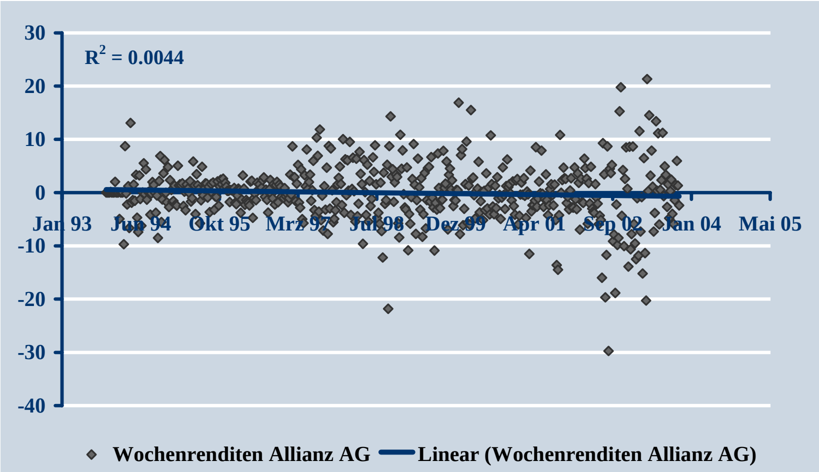

Abbildung 1: Aktienrenditen sind nicht stationär. Deutlich zu sehen ist die Heteroskedastie (Schwankungsbreite der Renditen erhöht sich im Zeitverlauf).

In der Realität ist dies nicht gegeben. Empirische Renditeverteilungen unterscheiden sich von der idealtypischen Normalverteilung vor allem in zwei Punkten:

---

[9] „Messung und Prognose von Volatilitäten“, Sautter, Jörg, Bankakademie Verlag, Frankfurt, 1996, Seite 3 ff.

- Empirische Renditeverteilungen besitzen mehr Wahrscheinlichkeitsmasse in der Mitte („center-peak“) und an den Enden (Leptokurtosis: „fat-tailed-distribution“).
- Sie sind oft rechtsschief und damit nicht symmetrisch.

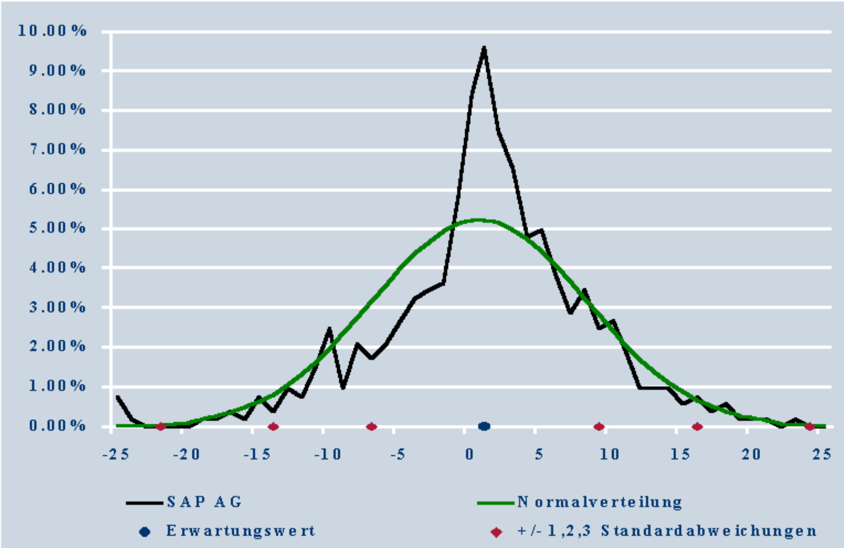

Abbildung 2: Gegenüberstellung der empirische Renditeverteilung (Wochenrenditen, logarithmisch) der SAP Aktie mit der entsprechenden theoretischen Normalverteilung. Deutlich werden a) die fat-tails b) das centered-peak und c) die Rechtsschiefe. Zudem ist die Entfernung von Mittelwert zu +/- einer (68,3 % Wahrscheinlichkeit), zwei (95,4% Wahrscheinlichkeit) und drei Standardabweichungen (99,7% Wahrscheinlichkeit) abgetragen worden (1,2,3 Sigma-Ereignis).

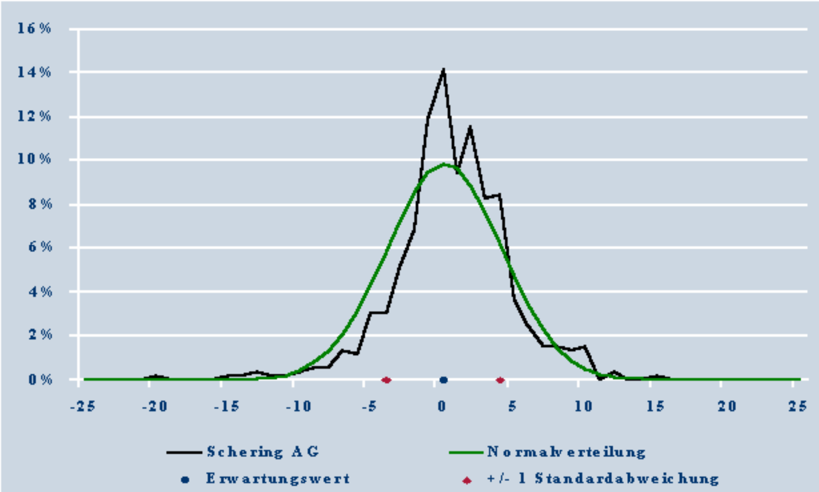

Abbildung 3: Vergleicht man die Glockenkurve (Normalverteilung) der Schering Aktie mit der der SAP Aktie so wird klar, dass sich die höhere Wahrscheinlichkeitsmasse zur Mitte bewegt (geringere Standardabweichung) und die Häufigkeit mittlerer Renditen ansteigt (höheres Mittel, Median, Modus).

Trotz dieser systematisch auftretenden Abweichungen ist die Normalverteilunsgannahme für die Portfolio-Theorie grundsätzlich nicht abzulehnen.
Die Begründung liefert eine statistische Gesetzmäßigkeit, der zentrale Grenzwertsatz. Er besagt, daß auch nicht-normalverteilte Renditen in der Summe gegen eine Normalverteilung tendieren.
Da in der Portfolio-Theorie diversifizierte Portfolios Gegenstand der Untersuchung sind, wird die Bedingung für die Gültigkeit des zentralen Grenzwertsatzes ausreichend erfüllt.

E) Wichtige Annahmen der Portfolio-Theorie

Neben der Normalverteilungsannahme der Renditen sind weitere Annahmen nötig, um die Realität für das Modell vereinfacht darzustellen.[10]

1) Beliebige Teilbarkeit der Wertpapiere.
   Dieser Aspekt wird relevant, wenn es darum geht zu bestimmen, welche Gewichte die einzelnen Wertpapiere in einem Portfolio einnehmen. In der Realität ist es beispielsweise nicht möglich, „1,5 Aktien" zu erwerben.

2) Der Planunghorizont entspricht einer Periode.
   Wenn man berücksichtigt, dass sich empirische Renditeverteilungen tatsächlich nicht stationär sind, d.h. geschätzter Erwartungswert und dessen Standardabweichung sich ständig verändern, wird klar, dass diese Prämisse notwendig ist. Man muss sich bewußt sein, dass die Aussagen des Modells streng genommen nur eine kurze Gültigkeit haben.

3) Existenz eines risikolosen Zinses.
   Es kann sowohl zum risikolosen Zinssatz Geld angelegt als auch aufgenommen werden (Kreditfinanzierung).

4) Die Präferenzen des Investors beziehen sich ausschließlich auf das Vermögen am Ende dieser Periode. Er strebt danach, dieses Endvermögen zu maximieren.

5) Dabei lassen sich die Präferenzen des Investors vollständig durch Erwartungswert und Varianz (Standardabweichung) beschreiben.

[10] Vorlesungsunterlagen „Basiskurs Finanzen" , Krahnen, J.P., Universität Frankfurt, Frankfurt, Wintersemester 2003/2004

6) Es gibt nur rationale Investoren.
   Rationale Investoren maximieren ihren Erwartungsnutzen, der sich – wie erwähnt – aus Erwartunsgwert und Varianz ergibt.

7) Jeder Investor ist risikoavers.
   Das ist gleichbedeutend damit, daß jeder Investor eine strikt konkave Nutzenfunktion als Funktion der unsicheren zukünftigen Auszahlung hat.
   Ein risikoaverser Anleger unterscheidet sich vom risikofreudigen vor allem dadurch, dass er nur dann in ein Wertpapier investieren wird, von dem er sich (im Mittel) bei möglichst geringem Risiko einen positiven Ertrag versprechen kann.
   Er agiert nur, wenn er ein „faires Spiel“ angeboten bekommt. Der risikofreudige Anleger präferiert dagegen Anlagemöglichkeiten, die im langfristigen Mittel nicht einmal eine positive Auszahlung, aber dafür extrem hohe Schwankungen (beispielsweise Biotechnologie-Aktien oder Lotterie) aufweisen.

IV.) Theoretische Anwendung der Portfolio-Theorie

A) Isolierte Betrachtung einzelner Rendite-Risiko-Profile: Anlageentscheidung nach dem klassischen Verständnis

Da nun sichergestellt ist, dass der Zwei-Paramter-Ansatz prinzipiell nicht mit den Annahmen des Modells kollidiert, läßt sich das Entscheidungsproblem der Portfolio-Theorie durch den erwarteten Ertrag und dessen Standardabweichung vollständig beschreiben

Somit lassen sich zwei Anlagealternativen in einem $\mu - \sigma$-Diagramm (zweidimensionales Koordinatensystem) anschaulich darstellen.

Dem Beispiel in Abbildung X liegt eine wöchentliche Renditezeitreihe, die sich von November 1993 bis Oktober 2003 erstreckt, zugrunde (520 Beobachtungen). [11]

[11] Quelle der Daten: ThomsonFinancial DataStream. Berechnungen: Eigene Berechnungen.

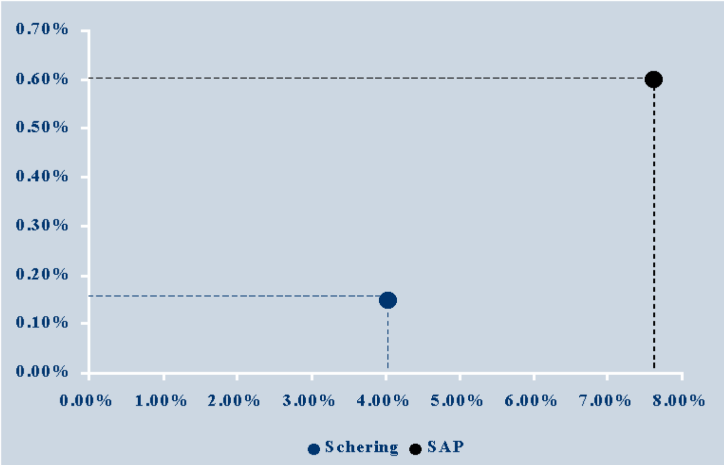

Abbildung 4: Rendite-Risiko-Profil für die DAX-Mitglieder Schering und SAP. Auf der x-Achse wurden die Standardabweichung des Samples, auf der y-Achse deren Mittelwert (als Schätzer für den Erwartungswert) abgetragen.

Es zeigt sich, dass im Mittel für die SAP Aktie eine höhere Rendite erwartet werden kann, als bei der Schering Aktie. Desweiteren wird verdeutlicht, dass die Aktie mit der höheren Rendite (SAP) auch das höhere Risiko aufweist.
Ein risikofreudiger Anleger würde hier die SAP Anteilscheine vor den konservativeren Schering Anteilscheinen bevorzugen. Umgekehrt würde der risikoaverse Investor die Schering Aktie präferieren.

Wie aber würden sich die Investorentypen verhalten, wenn sie statt dieser Entweder-Oder-Entscheidung eine Mischung aus beiden Assets zusammenstellen wollten?

B) Zwei-Wertpapier Fall

Zum Beispiel könnte man die beiden Wertpapiere zu jeweils gleichen Teilen in ein Portfolio geben. Diese Vorgehensweise wird als „Naive Diversifikation“ bezeichnet.[12]
Anstatt nun den Erwartungswert und dessen Varianz der jeweiligen Einzelaktie zu betrachten interessieren diese Kennzahlen nun für das Gesamtportfolio.

Die erwartete Rendite des naiv diversifizierten Portfolios zu ermitteln ist einfach. Sie ergibt sich als Mittelwert der für die Aktien erwarteten Renditen, wobei die Renditen zu gleichen Anteilen in das Ergebnis einfließen.

[12] „Finanzmathematik in der Bankpraxis – Vom Zins zur Option“, Heidorn, Thomas, Bankakademie Verlag, Frankfurt, 2000, S. 115 ff.

$$E(r_{Portfolio}) = \mu_{Portfolio}^{geschätzt} = \sum_{i=1}^{n} w_i * r_i^{geschätzt}$$

$$mit \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$und \quad w_1 = 50\%$$

$$sowie\ w_2 = 50\%$$

$$i : Laufindex\ des\ Portfoliomitglieds$$

$$E = Erwartungswert$$

$$\mu : Mittelwert$$

$$w : Portfoliogewicht$$

Ein Portfolio, dessen Gewichte sich zu 100% addieren heißt „zulässiges“ Portfolio[13].

C) Risiko des Portfolios: Diversifikationseffekt berücksichtigen

Etwas anders gestaltet sich die Ermittlung des Portfoliorisikos. Im ersten Augenblick könnte man vermuten, daß das Risiko des Gesamtdepots gleich dem Durchschnitt der Risiken aller im Depot enthaltenen Wertpapiere ist. Dies trifft jedoch nur in einer extremen Ausnahmesituation zu. In aller Regel ist das Risiko des gesamten Depots geringer als der Mittelwert der Einzelrisiken.

Dieser Effekt ist zwar theoretisch vorhersehbar, praktisch ist er allerdings verblüffend.
Die Erklärung ist einfach.
Vergleicht man beispielsweise die Kursverläufe zweier Automobilhersteller, so wird man eine hohe Ähnlichkeit der Kursentwicklungen, bzw. eine hohe Gleichläufigkeit der Renditen feststellen.

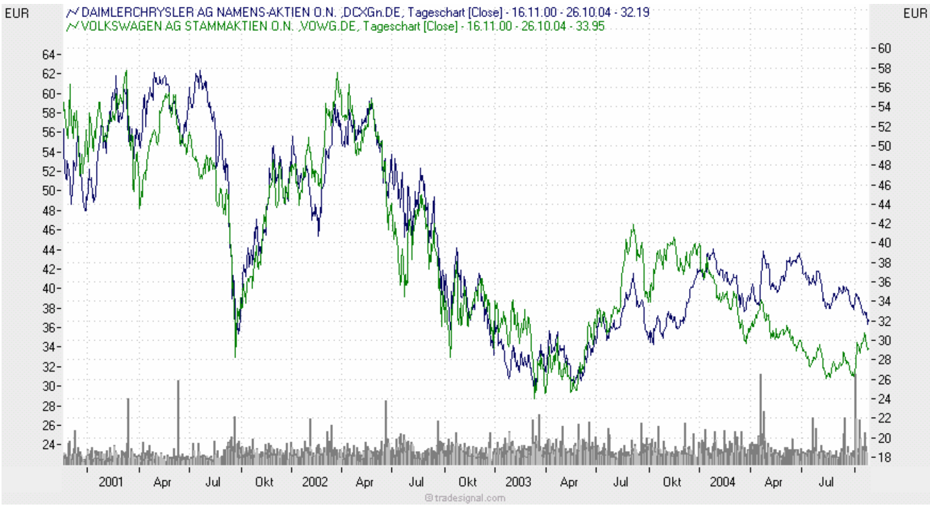

Abbildung 5: Kursverlauf der DaimlerChrysler Aktie und der Volkswagen Stamm-Aktie von 2001 bis 2004.

[13] Vorlesungsunterlagen „Basiskurs Finanzen“ , Krahnen, J.P., Universität Frankfurt, Frankfurt, Wintersemester 2003/2004

Diese Gleichläufigkeit wird weniger stark ausgeprägt sein, wenn man eine der Automobilaktien einer Aktie aus der Energiebranche gegenüberstellt.

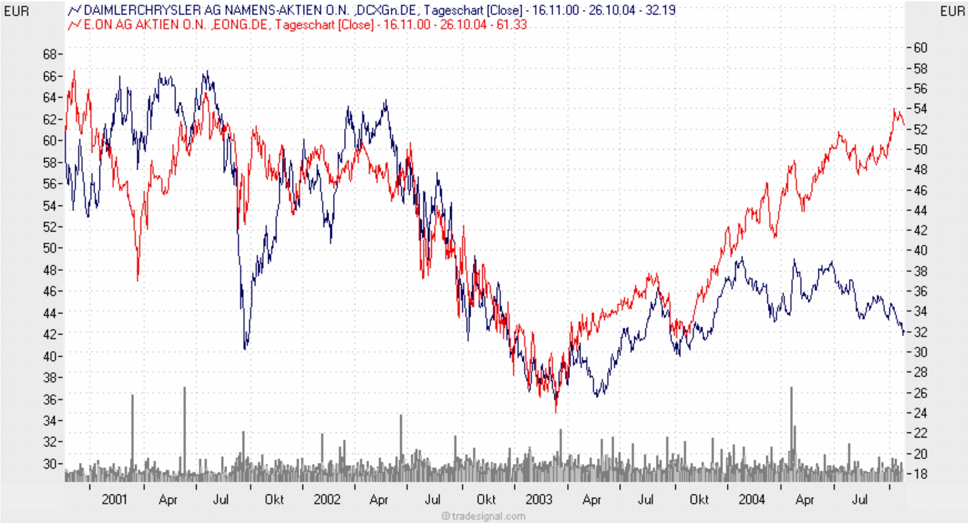

Abbildung 6: Kursverlauf der DaimlerChrysler Aktie und der E.on Aktie von 2001 bis 2004.

Grund für die Unterschiedlichkeit können beispielsweise unternehmens- oder branchenspezifische Einflußfaktoren sein, die auf Länderebene höher wiegen als allgemeine politische oder makroökonomische Aspekte.

Hält der Anleger nun Aktien aus diesen verschiedenen Branchen, so sinkt sein Risiko in diesem Fall aufgrund der sog. Branchendiversifikation.

Bei Aktien ist meist eine tendenzielle Gleichläufigkeit gegeben („heterogene Kursentwicklung“), da Aktien sehr unterschiedlich auf Mikro- und Makro-Daten reagieren.

Mathematisch meßbar wird der Diversifikationseffekt durch die statistische Maßzahl Korrelation (bzw. Kovarianz), die mit dem griechischen Buchstaben Rho abgekürzt wird.

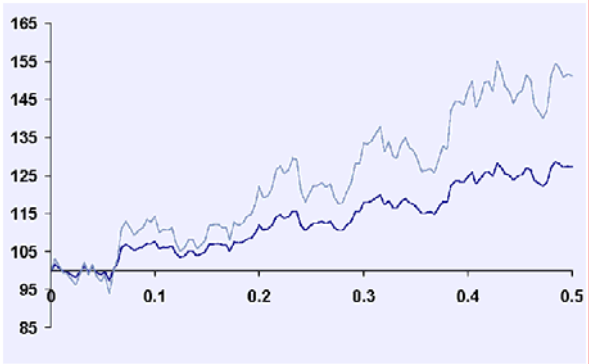

Abbildung 7: Vollständige Gleichläufigkeit zweier Variablen. Random Walk zweier Zufallsvariablen mit Korrelation=+1; Drift: 0,1; Volatilität Variable 1: 0,2; Volatilität Variable 2: 0,4.[14]

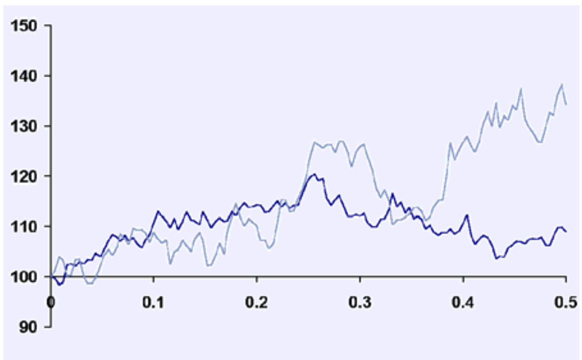

Abbildung 8: Kein Zusammenhang zwischen zwei Variablen. Random Walk zweier Zufallsvariablen mit Korrelation=0; Drift: 0,1; Volatilität Variable 1: 0,2; Volatilität Variable 2: 0,2.

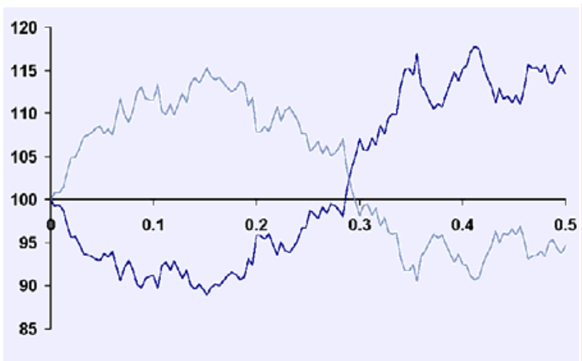

Abbildung 9: Vollständige Gegenläufigkeit zweier Variablen. Random Walk zweier Zufallsvariablen mit Korrelation=0; Drift: 0,1; Volatilität Variable 1: 0,2; Volatilität Variable 2: 0,4.

[14] Berechnungsweise kann anhand eines MS-Excel Dokuments auf www.stephankruegel.de nachvollzogen und eigene Kalkulationen vorgenommen werden.

Man kann sie auch als zahlenmäßige Ausdruck für die Höhe des Risikosenkungspotenzial interpretieren.

Die Kovarianz zweier Variablen steht durch den Korrelationskoeffizienten im Zusammenhang mit den einzelnen Varianzen, wie in Formel N zu sehen ist.

$$\sigma_{12} = \rho_{12} * \sigma_1 * \sigma_2$$

Im Beispiel mit SAP und Schering wurden die beiden Einzelvarianzen bereits geschätzt (SAP: 7,61%, Schering: 4,04%). Nach Berechnung der Kovarianz, deren Eingabe-Parameter bereits alle berechnet wurden, kann die Formel umgestellt und nach Rho aufgelöst werden.

$$\sigma_{12} = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} (r_{1,i} - \mu_1^{geschätzt}) * (r_{2,i} - \mu_2^{geschätzt})$$

$r_{1,i}$: *Periodenrendite der Aktie* 1 *zum Zeitpunkt i*

$r_{2,i}$: *Periodenrendite der Aktie* 2 *zum Zeitpunkt i*

$\mu_1^{geschätzt}$ = *Erwartungswert der* Re*ndite von Aktie* 1 *im betrachteten Zeitraum*

$\mu_2^{geschätzt}$ = *Erwartungswert der* Re*ndite von Aktie* 2 *im betrachteten Zeitraum*

n = *Anzahl der Portfolio – Mitglieder, hier gleich* 2

Es ergibt sich für die Kovarianz von SAP und Schering eine empirische Kovarianz von 6,97%.

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 * \sigma_2}$$

Durch Umstellung wird die Korrelation errechnet. Wie man sieht handelt es sich bei dem Korrelationskoeffizienten um die normierte Kovarianz, die im Beispiel den Wert 0,32 einnimmt.

Aufgrund dieser Normierung bewegt sich Korrelation zweier Zeitreihen im Wertebereich von minus eins (völlige Gegenläufigkeit: streng linear negativer Zusammenhang feststellbar) über Null (kein systematischer Zusammenhang feststellbar) bis hin zur positiven Schranke bei plus eins (vollkommene Gleichläufigkeit: streng linear positiver Zusammenhang zwischen den Renditen). Sie macht allerdings keine Aussage über den Umfang der Gleich-, bzw. Gegenläufigkeit.[15]

Um die Varianz eines Portfolios aus zwei Aktien zu berechnen, muss deshalb genau diese Korrelation, also die Maßzahl für das Schwingen der Werte miteinander in der Rechnung

[15] „Grundlagen der Statistik I“, Schwarze, Jochen, nwb Verlag, Herne/Berlin, 1997; „Statistik verstehen“, Krämer, Walter, Campus Verlag, Frankfurt, S.183 ff.

berücksichtigt werden. Denn die Schwingungen von zwei Wertpapieren können sich kompensieren und auf diese Weise das gemeinsame Risiko reduzieren.

Die Varianz einer geht Aktie wird mit den quadrierten Portfolioanteilen gewichtet und die gewichtete Kovarianz addiert.

Aktie 1 (SAP): $w_1^2 * \sigma_1^2$ und $w_1 * w_2 * \sigma_{12} = w_1 * w_2 * \rho_{12} * \sigma_1 * \sigma_2$

Aktie 2 (Schering): $w_1^2 * \sigma_1^2$ und $w_2 * w_1 * \sigma_{21} = w_2 * w_1 * \rho_{21} * \sigma_2 * \sigma_1$

Durch Addition der Terme ergibt sich die Portfoliovarianz.

$$\sigma^2_{Portfolio} = w_1^2 * \sigma_1^2 + w_2^2 * \sigma_2^2 + w_1 * w_2 * \rho_{12} * \sigma_1 * \sigma_2 + w_2 * w_1 * \rho_{21} * \sigma_2 * \sigma_1 =$$
$$= w_1^2 * \sigma_1^2 + w_2^2 * \sigma_2^2 + 2 * w_1 * w_2 * \rho_{12} * \sigma_1 * \sigma_2$$
$$da \quad \rho_{12} = \rho_{21}$$

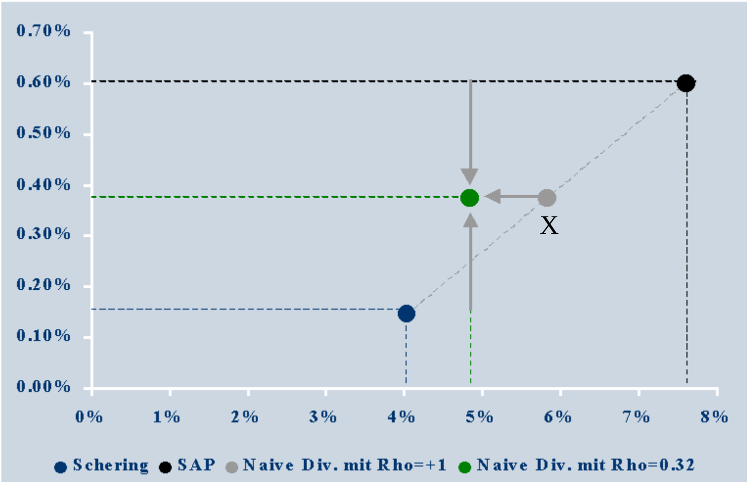

Abbildung 10: Der Diversifikationseffekt.

Der Einfluss der Korrelation auf das Risiko des Portfolios wird deutlich, wenn man Abbildung 10 betrachtet, in der die Auswirkung des Diversifikationseffektes für den Fall der naiven Diversifikation dargestellt wurde.

Fall: Vollkommene Gleichläufigkeit (Korrelation gleich 1)

Würde man zwischen SAP und der Schering Aktie einen völligen Gleichlauf der Renditen unterstellen (also eine Korrelation von plus Eins annehmen), so ergäbe sich als Punkt X als Ertrags-Risiko-Koordinate des Portfolios.

Fall: Tendenzielle Gleichläufigkeit (Korrelation gleich 0,32)

Da aufgrund der geschätzten Korrelation von 0,32 (tendenzielle Gleichläufigkeit) jedoch in diesem Fall ein leichter Diversifikationseffekt herrscht, verschiebt sich der Punkt nach links – bei gleichbleibender erwarteter Rendite wird Risiko zugunsten des Investors vernichtet.

Mathematisch ausgedrückt bedeutet das, dass die Portfolio-Varianz unter das arithmetische Mittel der Einzelrisiken gefallen ist (grauer links-gerichteter Pfeil in Abbildung 10)

D) Effiziente Portfolios für den Zwei-Wertpapier-Fall

Geht man nun einen Schritt weiter und variiert (ceteris paribus) die Portfolio-Gewichte, so erhält man eine Vielzahl von Rendite-Risiko-Koordinaten, die man in der Gesamtheit als Möglichkeitskurve (in der Abbildung grün eingefärbt) bezeichnet. Die Möglichkeitskurve weist einen hyperbelförmigen Verlauf auf.

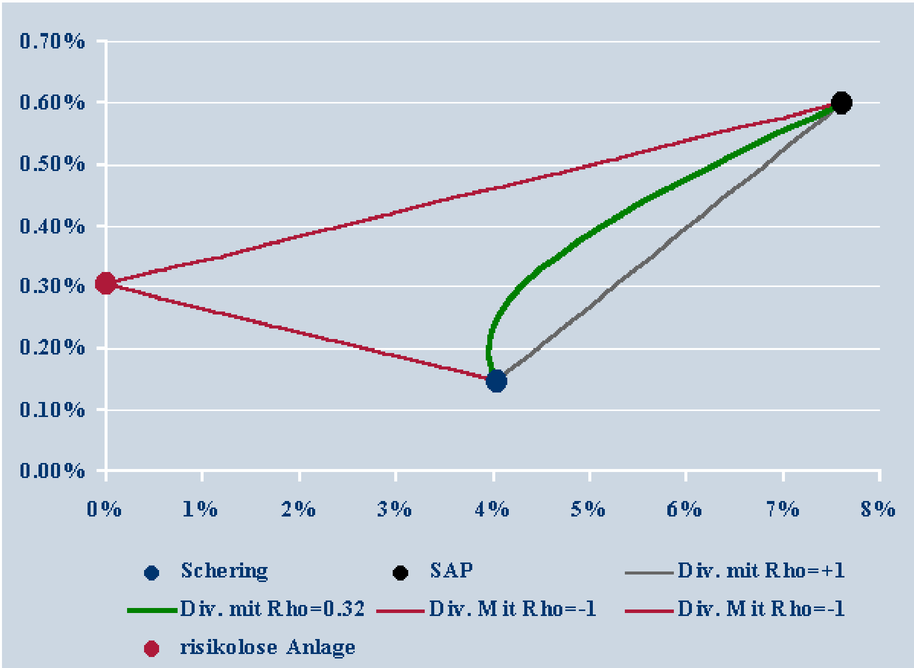

Abbildung 11: Verschiedene Korrelationsszenarien.

Auf dem ansteigenden Teil der Möglichkeitskurve („effizienter Rand“, „effizienter Ast“, „efficient frontier“) befinden sich alle effizienten Portfolios. Sie genügen immer einer von zwei Bedingungen:

1) Mit dem Portfolio wird eine gegebene Renditeerwartung mit minimaler Varianz umgesetzt.
2) Mit dem Portfolio wird eine gegebene Risikoerwartung mit maximaler Rendite erwirtschaftet.

Ein rationaler Investor wird immer in ein Portfolio investieren, dass eine der beiden Bedingungen erfüllt (je nach Präferenz des Investors: Ist er an mehr Rendite oder an ein Mehr an Sicherheit interessiert?) und das auf diesem effizienten Ast liegt.[16]

[16] „Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance“, Wilmott, Paul, Wiley Verlag, Chichester, England, 2001, Seite 101 ff.

Fall: Vollständige Gegenläufigkeit der Renditen (Rho=-1)

Abbildung 11 zeigt, warum negative Korrelation, beispielsweise –1, erstrebenswert sind. Trotz abnehmendem Risikos steigt in diesem Fall der Erwartungswert der Portfoliorendite (untere rot gefärbte Linie). Für eine Standardabweichung von Null ergibt sich immer noch eine Rendite von 0,30%, also mehr als eine riskante Position in einer Schering Aktie (blauer Punkt) einbringen würde. Noch höhere Erwartungswerte müssen auch bei negativer Korrelation wieder mit ansteigendem Risiko erkauft werden (obere rot gefärbte Linie).

Grundsätzlich gilt für den Diversifikationseffekt: Um eine Risikoreduktion herbeizuführen ist keine negative Korrelation der Assets nötig. Eine negative Korrelation der Zeitreihen ist lediglich der günstigste Fall. Hier werden Risiken in hohem Maße vernichtet. Prinzipiell genügt (c.p.) bereits eine Korrelation ungleich eins, damit ein Portfolio von der Wirkung der Risikostreuung profitieren kann.

E) Effiziente Portfolios für n-Wertpapiere

Das Beispiel für Diversifikation anhand von nur zwei Wertpapieren (exemplarisch SAP und Schering) hat gezeigt, dass bereits durch ein nahezu beliebiges Zusammenstellen von Wertpapieren eine Risikoreduktion herbeigeführt werden kann.
Bei einem Portfolio aus mehreren Aktien ist die Situation ähnlich. Für die Formel der Portfoliovarianz ergibt sich:

$$\sigma^2_{Portfolio} = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 * \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} w_i * w_j * \rho_{ij} * \sigma_i * \sigma_j$$

Entscheidender Unterschied: Mehrere Kovarianzen zu berücksichtigen

Bei n Wertpapieren müssen nun $n*(n-1)/2$ Kovarianzen berücksichtigt werden.
In einem ersten Schritt werden in der Formel die n-Varianzen (Einzelrisiken) gewichtet aufsummiert. Anschließen werden alle $(n^2 - n)$ paarweisen Kovarianzen addiert.

Für die Ausführung des zweiten Schritts bedient man sich der sog. Varianz-Kovarianz Matrix (kurz VarCov-Matrix; normiert: „Korrelationsmatrix“), wie sie in Abbildung 12 beispielhaft dargestellt wurde.

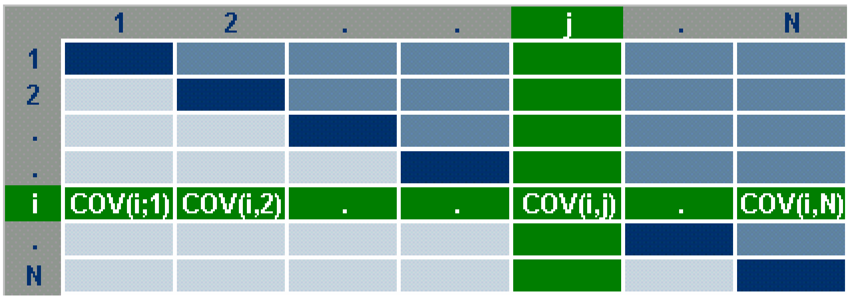

Abbildung 12: Varianz-Kovarianz Matrix.

In den Feldern der Hauptdiagonalen sind die Varianzen der jeweiligen Wertpapiere (Einzelrisiken) abgetragen. In den Zellen unter- und oberhalb dieser Diagonalen findet man die paarweisen Kovarianzen der Wertpapiere (Gemeinsames Risiko).
Die untere Fläche ist dabei das Spiegelbild der oberen.[17]

<u>Absoluter und relativer Beitrag eines Wertpapiers zum Portfoliorisiko</u>

Hat man die VarCov-Matrix ermittelt, so erleichtert sie die Berechnung des Beitrags eines Wertpapiers (z.B. des i-ten Wertpapiers) zum Gesamtrisiko. Zu diesem Zweck wird einfach alle Elemente der i-te Zeile oder Spalte gewichtet aufsummiert.
Alternativ kann auch die Kovarianz zwischen dem Wertpapier und dem Portfolio berechnet werden.

$$Risikobeitrag(Wertpapier\ i) = w_i * \sum_{j=1}^{n} w_j * \sigma_{ij} = w_i * \sigma_{iP}$$

w_i : *Portfoliogewicht von Wertpapier i*

σ_{ij} : *Kovarianz zwischen Wertpapier i und Wertpapier j*

σ_{iP} : *Kovarianz zwischen Wertpapier i und Portfolio P*

Aussagekräftiger wird diese Kennzahl, indem man sie durch das Gesamtrisiko des Portfolios teilt. Hierdurch erhält man den relativen Risikobeitrag, ausgedrückt in Prozent.

$$Relativer\ Risikobeitrag(Wertpapier\ i) = w_i * \left[\frac{\sigma_{iP}}{\sigma_P^2}\right] = w_i * \beta_{iP}$$

w_i : *Portfoliogewicht von Wertpapier i*

σ_{ij} : *Kovarianz zwischen Wertpapier i und Wertpapier j*

σ_{iP} : *Kovarianz zwischen Wertpapier i und Portfolio P*

Die Relation von Risikobeitrag und Gesamtrisiko wird auch als Beta oder Sensitivität des Wertpapieres i bezeichnet.
Beta gibt an, wie sich das Gesamtrisiko des Portfolios verändert, wenn eine weitere Einheit des Wertpapiers i erworben wird.

---

[17] Unterlagen zur Vorlesung „Quantitative Methoden des Risikomanagements“, Prof. Rommelfanger, Universität Frankfurt, Frankfurt, Sommersemester 2004

Bei einer Kennzahl größer eins wird das Gesamtrisiko steigen, bei einem Beta kleiner eins wird es sinken.

F) Bedeutung der Kovarianz in großen Portfolios

Effiziente Portfolios sind die, die das Risiko bei gegebener Renditeerwartung minimieren. Realistischerweise nimmt kann man sagen, dass – außer bei einer vollständigen Investition in risikolose Assets – trotz des Diversifikationseffekts immer eine positive Portfoliovarianz übrig bleiben wird.[18]

Den entscheidenden Beitrag zur Maximierung des Diversifikationseffektes kommt mit zunehmendem Umfang des Portfolios folglich nicht aus einer möglichst Standardabweichung des einzelnen Wertpapiers, sondern er resultiert aus einer möglichst geringen Kovarianz des Wertpapiers zum Gesamtportfolio.

Bei Aktien, vor allem bei relativ homogenen Aktien (gleiches Heimatland, gleiche Branche etc.) ist meistens eine positive Korrelation gegeben. Während sich die individuellen Risiken wegdiversifizieren lassen bleibt doch immer ein Gesamtmarktrisiko zurück.

Es läßt sich zeigen, dass die Rolle der Standardabweichung der Einzelaktie immer unwichtiger wird, je mehr Aktien in das Portfolio aufgenommen werden. Das Risiko der Einzelaktien geht bei einem unendlich großen Aktienportfolio gegen Null, während Kovarianzrisiken („Marktrisiko“) in den Vordergrund treten.

Anschaulich gemacht werden kann diese Tatsache wieder am Beispiel von VarCov-Matizen.

Im Zwei-Wertpapier-Fall werden jeweils zwei Varianzen und zwei Kovarianzen betrachtet.

Im Vier-Wertpapier-Fall beträgt dieses Verhältnis bereits 4 zu 12 (Allgemein: $n \ zu \ (n^2 - n)$).

Dehnt man das Beispiel auf unendlich viele Wertpapiere aus, so wird deutlich, dass in einem derartigen Fall Varianzrisiken nur noch eine vernachlässigbare Rolle spielen, wohingegen Kovarianzrisiken überproportional wichtig werden.

$$\lim_{n \to +\infty} (\sigma_P^2) = \overline{\sigma_{ij}}$$

σ_P^2 : *Portfolio* var*ianz*

$\overline{\sigma_{ij}}$: *Durchschnittliches Ko* var*ianzrisiko aller n Wertpapiere*

---

[18] „Finanzmathematik in der Bankpraxis – Vom Zins zur Option“, Heidorn, Thomas, Bankakademie Verlag, Frankfurt, 2000, S. 118

Es verbleibt das durchschnittliche Kovarianzrisiko, das nicht vernichtet werden kann. Es wird als systematisches Risiko bezeichnet („Marktrisiko“). Unsystematische Risiken sind die der Einzelaktie (Standardabweichung oder Varianz der Einzelaktie).

Aus diesem Grund ist bei der Zusammenstellung eines Portfolios nicht das individuelle Risiko der Einzelaktie interessant, sondern der Risikobeitrag zum Portfolio. Es muss überprüft werden, wie sich die Rendite-Risiko-Struktur des Portfolios bei Zumischung eines Wertpapiers verändert.

G) Der Umhüllungseffekt und Globales Minimum-Variance-Portfolio

Im Folgenden wird das Beispiel um eine weiter Anlagealternative erweitert: Die BMW Aktie. Sowohl das Risiko als auch die Rendite betreffend bewegt sich der BMW Anteilschein im betrachteten Zeitraum zwischen der SAP und der Schering Aktie.
Es ergeben sich neue Kombinationsmöglichkeiten: Es könnte eine Kombination aus Schering und BMW (Abbildung 13: grau), SAP und BMW (rot) oder Schering und SAP (grün) gewählt werden.
Die Rendite-Risikoprofile und die effizienten Äste werden für jede denkbare Kombination anders gestaltet sein.
Jedoch wird das Portfolio aus allen drei Assets jeden dieser Äste dominieren und damit „umhüllen“.
Wie gesehen besteht jetzt aber die Möglichkeit auch effiziente Portfolios innerhalb der umhüllenden Hyperbel zu selektieren.

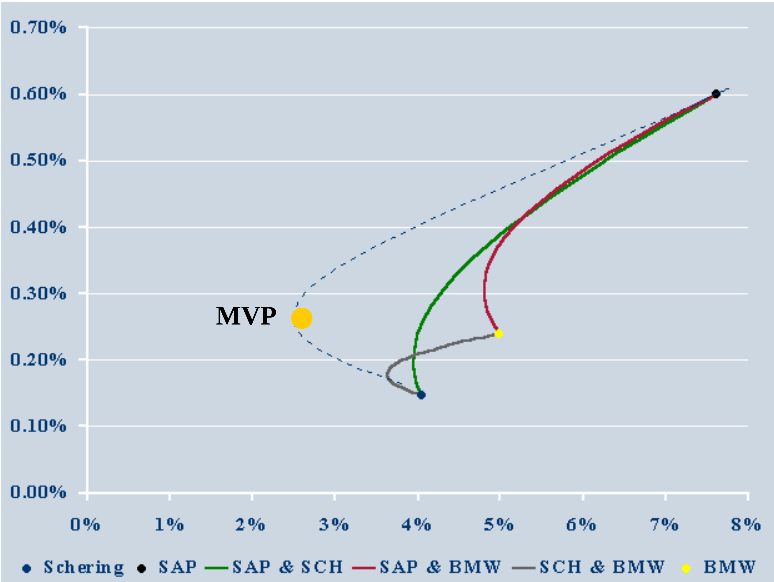

Abbildung 13: Umhüllungseffekt und Minimum-Variance-Portfolio.

Globales Minimum-Variance-Portfolio

Das Portfolio, das auf der umhüllenden, äußersten Linie (Efficient Frontier; hier idealisiert) die geringste Portfoliovarianz aufweist, wird Globales Minimum-Variance-Portfolio (nachfolgend MVP) genannt. Keine andere Asset-Kombination kann bei gegebener Renditeerwartung ein geringeres Risiko bieten. Deswegen auch die Bezeichnung „global“ (anders: „unter der Berücksichtigung aller Alternativkombinationen“).

Das MVP teilt die Portfolios des effizienten Randes in effizienten und ineffiziente Portfolios.
Die Portfolioalternativen unterhalb des Punktes MVP sind ineffizient. Denn auf der oberen Seite der Hyperbel existieren Portfolios, die bei gleicher Standardabweichung eine höhere Rendite versprechen. Aus diesem Grund werden alle Portfolios oberhalb des Punktes MVP als effiziente Portfolios bezeichnet. Sie „dominieren“ die ineffizienten Alternativen.

Portfolio-Selektion des risikaversen Investors

Für den risikoaverse Investor, der nach bei minimalem Risiko den größtmöglichen Ertrag erwirtschaften will, um seinen Erwartungsnutzen zu maximieren, sind deshalb ausschließlich die dominierenden effizienten Portfolios auf der alle Alternativen umhüllenden Möglichkeitskurve relevant.

Enormer Rechenaufwand bei Anwendung des Portfolio-Selection Models

Um diese Ergebnisse bei praktischer Anwendung auch wirklich zu erhalten sind ungeheur hohe Rechenkapazitäten nötig. Bei 100 Aktien müssen bereits 4950 Kovarianzen berechnet werden, dazu noch 100 (aussagekräftige) Erwartungswerte und Standardabweichungen. Wenn man sich vor Augen hält, das führende Aktienindizes wie der S&P500 in den USA 500 Einzelaktien beinhaltet wird das Datenproblem deutlich. Abhilfe schafft an diesem Punkt die Erweiterung des Modells um den risikolosen Zins, die zu einem (unter anderem aufgrund dieser Datenproblematik entwickelten) anderen Modell hinführt: Dem CAPM (Capital Asset Pricing Model), mit dem nicht mehr nur Risiken Mü-Sigma effizienter Portfolios betrachtet werden können, sondern Risiken einzelner Wertpapiere durch Isolierung des systematischen Risikos vergleichbar werden.

Ergänzung des Modells um eine gegebene risikolose Anlagemöglichkeit

Ein risikoloses Investment hat den Vorteil, dass dessen Ertrag sicher ist. Die Eintrittswahrscheinlichkeit der Auszahlung beträgt 100%.

Auch in der Realität sind risikolose Anlagen möglich. Beispielsweise ist eine Geldmarktanlage oder eine Staatsanleihe hoher Bonität mit einer garantierte Aus- und Rückzahlung verbunden.
Im Modell kann man den sog. „risikolosen Zins" auch dazu verwenden, Kapital aufzunehmen und Kreditaufnahme mit in das Kalkül aufzunehmen.

Zeichnet man den risikofreien Zins mit Standardabweichung Null in das Rendite-Risiko-Diagramm ein, und legt eine Gerade durch diesen Punkt, so dass die Efficient Frontier tangiert wird, so entsteht eine „neue" Efficient Frontier. Der Risiko-Rendite-Raum wird nun durch eine Gerade begrenzt. Diese Gerade repräsentiert das CAPM (Capital Asset Pricing Model). Dabei steht der Schnittpunkt von Gerade und Efficient Frontier für das Marktportfolio, also das fiktive Portfolio, in dem alle Wertpapiere des Marktes vorhanden sind.

Dieses Marktportfolio ist bereits (annähernd) bekannt.[19] In Deutschland wäre hierfür das Äquivalent der DAX, in den USA der bereits erwähnte S&P500. Beide Indizes decken mehr als 80% der gesamten nationalen Marktkapitalisierung ab und sind aus diesem Grund ein guter Proxy für das Marktportfolio. Genauso verhält es sich mit dem risikolosen Zins. Hierfür bedient sich eines dem Anlagehorizont entsprechenden Geldmarktsatzes (z.B. Euribor).
Die Portfoliogerade (Security-Market-Line) kann anschließend durch Verbindung der beiden Punkte ohne großen Aufwand erzeugt werden.

Die risikoneutralen Investoren setzen ihre Präferenzen durch Ausnützen des risikolosen Zinssatzes um. Bei geringer Renditeerwartung wird ein Teil des Kapitals zum festen Zins angelegt. Bei höherer Renditeerwartung wird ein Teil des Portfolios über Kreditaufnahme finanziert, gleichzeitig erhöht sich die Varianz.

H) Das „beste" Portfolio finden

Die Efficient Frontier wird objektiv ermittelt. Den Punkt auf dieser Hyperbel zu suchen, der das „beste" Portfolio offeriert, ist jedoch eine subjektive Angelegenheit und hängt von individuellen Präferenzen ab.

[19] „Aktienkursprognose – Professionelles Know How zur Vermögensanlage", Sattler, Ralf, Verlag Franz Vahlen, München, 1999, Seite20

Maximierung der Wahrscheinlichkeit, eine Mindestverzinsung zu erwirtschaften

Eine Interpretatiosnhilfe und Richtlinie, sich im Risiko-Ertrags-Diagramm zurecht zu finden, gibt **Willmott**[20]. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Renditen des Portfolios aus n Wertpapieren und die Renditen der Wertpapiere selbst normalverteilt sind. Folgedessen beträgt die erwartete Rendite des Portfolios μ_P mit einer Standardabweichung von σ_P.

Die Steigung der Wertpapiermarktlinie, die die Efficient Frontier tangiert und Auf dem Achsenabschnitt des risikolosen Zinses beginnt wird errechnet durch

$$s = \frac{\mu_P - r_{risikolos}}{\sigma_P}$$

Das Ergebnis ist eine Maßzahl für die Wahrscheinlichkeit, dass die Rendite des Tangentialportfolios den risikolosen Zins $r_{risikolos}$ übersteigt.

In einem weiteren Schritt kann diser Z-Wert in eine Wahrscheinlichkeit transformiert werden. Wenn C() die Funktion für die kumulative Standard-Normalverteilung ist, dann ist C(s) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Portfoliosrendite den risikolosen Zinssatz übersteigt. Natürlich läßt sich $r_{risikolos}$ auch durch die vom Anleger geforderte Mindestverzinsung r^* ersetzten. Allgemein:

$$s = \frac{\mu_P - r^*}{\sigma_P}$$

$$C(s) = C\left(\frac{\mu_P - r^*}{\sigma_P}\right)$$

Der Investor möchte diese Wahrscheinlichkeit der höheren Rendite maximieren. Es ist also ratsam, dass Portfolio zu wählen, bei dem diese Steigung am größten ist.

Auf der anderen Seite kann man davon ausgehen, dass man sich für ein bestimmtes Portfolio auf der Möglichkeitslinie entschieden hat. In diesem Fall ist die Steigung der Linie gegeben und konstant. Man kann nun mit der Wahrscheinlichkeit C(s) sagen, dass man keinen höheren Verlust als $\mu_P - s * \sigma_P$ erleiden wird.

Individuelle Nutzenfunktionen zur Identifikation optimaler Portfolios

Kritische Prämisse ist hierbei, die Nutzenfunktion des Anlegers zu kennen, um den Erwartungsnutzen verschiedener Alternativen zu kalkulieren. Anhand von Indifferenzkurven, auf denen der Investor an jedem Punkt bezüglich der Risiko-Ertrags-

[20] Wilmott, Paul, Wilmott Introduces Quantitative Finance, Seite 343

Relation gleichgültig eingestellt ist, wird der Tangentialpunkt mit der Efficient Frontier gesucht. In diesem Punkt wird der Erwartungsnutzen des Anlegers maximiert.

V.) Kritische Würdigung

A) Normalverteilungsannahme des Portfolio-Selection Modells

Wie bereits dargestellt ist die Normalverteilungsannahme nicht unproblematisch. Zwar kann man damit aufgrund des Zentrale Grenzwertsatzes arbeiten, aber es tun sich beim Vergleich mit der Realität trotz allem Ungereimtheiten auf.

Zum einen werden „mittelmäßige“ Renditen z.B. am Aktienmarkt weit häufiger anzutreffen sein als größere. Auch die fat-tails der Verteilung sind aus der heutigen Auffassung von der Funktionsweise des Kapitalmarkts nicht mehr wegzudenken. „Dicke Enden“ kommen durch häufiger als erwartet stattfindende Extremereignisse zustande, wie beispielsweise Crash-Situationen. Crash-Situationen, die im Laufe der Zeit immer wieder [21]auftreten generieren in kurzer Zeit sehr hohe negative Periodenrenditen. Sie sind verantwortlich für das linke dicke Ende in einer Häufigkeitsverteilung einer Aktie/eines Aktienindex.

Erwähnenswert ist, dass sich die Marktteilnehmer selbst auf diese Art von Ereignissen eingestellt zu haben scheinen und diese in der Realität berücksichtigen. So sind am Optionsmarkt nach dem Börsenkrach von 1987 für Optionen mit unterschiedlichem Basispreis aber sonst gleicher Ausstattung so genannte „Volatilitäts-Smiles“ entstanden.[22]

Der Markt preist für unterschiedliche Basispreise auf dieselbe Aktie andere Risiken ein – obwohl es faktisch für eine Aktie nur genau ein Risiko gibt.

In der Theorie versuchte man dem zu begegnen, indem man eine Verteilung suchte, die extreme Bewegungen berücksichtigt („Extremwertheorie“). Hier geht man davon aus, dass extreme Bewegungen einer eigenen Verteilung folgen, der so genannten „Generalised Pareto Distribution“ (GPD)[23].

B) Paramterschätzung kritisch und fehleranfällig

Ein kritischer Erfolgsfaktor ist die „richtige“ Schätzung von Erwartungswert der Rendite und deren Standardabweichung. Wenn man die Parameter empirisch ermittelt stellt sich die Frage, wie lange die historische Zeitreihe sein soll, aus der die Informationen gewonnen werden. Bedient man sich zu kurzer Datenreihen, so ist es gerade im jetzigen

---

[21] „Kursstürze am Aktienmarkt“, Kiehling, Hartmut, dtv Verlag, München, 2000

[22] „Erfolgreich am Optionsmarkt – Teil 6. Volatilitäts-Smiles. Im Land des Lächelns“, Krügel, Stephan, BörseNow, Atlas Verlag, Würzburg, September 2001, Seite 33 ff.; „Why are those options smiling?“, Ederington, Louis, Guan, Wie, The Journal of Derivatives, Winter 2002

Umfeld möglich, für erwartete Renditen negative Werte zu erhalten. Dies steht im Widerspruch zu den Grundgedanken des Modells. Denn ein risikoaverser Anleger würde in keinem Fall ein Asset mit negativem Erwartungswert halten.

Legt man den Horizont sehr lange an, ist die Frage, ob diese Vorgehensweise Sinn macht. Denn jeder Anleger hat, wie eingangs der Arbeit erwähnt, einen bestimmten Anlagehorizont. Danach möchte er das im Optimalfall für andere Zwecke – beispielsweise als Kapitalpolster im höheren Alter - verwenden . Ob das Mittel aus 50 Jahren Rendite-Historie beispielsweise ein geeigneter Schätzer für das Mittel der kommenden fünf Jahre ist, ist höchst fragwürdig.

Das identische Problem ergibt sich bei der Schätzung der Standardabweichung.

C) Ist die Standardabweichung das korrekte Risikomaß?

Es kommt erschwerend hinzu, dass Wertpapierrisiken („Volatilitäten“) eigenen Gesetzmäßigkeiten folgen. So neigen Volatilitäten beispielsweise dazu, schneller zu steigen als zu fallen. Die Standardabweichung ist jedoch ein symmetrisches Risikomaß. Zur Kompensation dieser bei der Standardabweichung nicht berücksichtigten Tatsachen wurden beispielsweise ARCH- oder GARCH-Modelle („Autoregressive Conditional Heteroscedasticity“ und „Generalised ARCH“) entwickelt, um Wertpapierrisiken realitätsnaher zu erfassen.[24]

Gerke/Bank[25] schlagen außerdem vor, alternative Streuungsmaße wie z.B. die Semi-Varianz zu verwenden. Die Semivarianz berücksichtigt im Gegensatz zur Standardabweichung lediglich die negativen Abweichungen vom Erwartungswert und kommt aus diesem Grund dem intuitiven Risikoverständnis näher.

Radulesco[26] schlägt die Verwendung des Value-at-Risk-Maßes als Risikokennzahl vor. Seine historischen Überprüfungen zeigten, dass diese Methodik im Testzeitraum (1985 bis 2000) bessere Ergebnisse hervorgebracht hätte als das Mittelwert-Standardabweichung-Konzept.

Sattler[27] stelllt in Frage, dass die Standardabweichung das „korrekte“ Risikomaß ist. Er demonstriert, dass es zwischen der Standardabweichung und der Durchschnittsrendite

---

[23] „Einführung in die Statistik der Finanzmärkte“, Franke, Härdle, Hafner, Springer Verlag, Berlin, 2004, Seite 317 ff.

[24] „Einführung in die Statistik der Finanzmärkte“, Franke, Härdle, Hafner, Springer Verlag, Berlin, 2004, Seite 247 ff.; „Erfolgreich am Optionsmarkt – Teil 5. Umsetzung der Strategie“, Krügel, Stephan, BörseNow, Atlas Verlag, Würzburg, Juli 2001, Seite 32 ff.; „Erfolgreich am Optionsmarkt – Teil 3. What goes up must come down – Smarter Trading mit Volatilitäten“, Krügel, Stephan, BörseNow, Atlas Verlag, Würzburg, Juni 2001, S. 41 ff.

[25] Gerke, Wolfgang, Bank, Matthias: Finanzierung, Seite 181

[26] Radulesco, M., „Optimal Portfolio Selection: Mean-Variance versus Mean-VaR“, Working Paper, Institute of Mathematical Statistics and Applied Mathematics, Bukarest

[27] „Aktienkursprognose – Professionelles Know How zur Vermögensanlage“, Sattler, Ralf, Verlag Franz Vahlen, München, 1999, Seite16

keinen offensichtlichen Zusammenhang gibt. Das heißt, theoretisch existieren Aktien, die auch bei vergleichsweise geringer Schwankung übermäßig hohe Renditen erwirtschaften. In einem weiteren Schritt legt Sattler dar, dass das portfoliobezogene Beta-Risiko („systematisches Risiko“, „Marktrisiko“) eine adäquatere Größe ist.

D) Fuzzy-Logic Vorgehensweise: Sind scharfe Parameter die richtigen Instrumente zur Lösung der Problemstellung?

Ramaswamy[28] stellt heraus, dass es gerade an den dynamischen und sehr von Erwartungen beeinflussten Kapitalmärkten nicht unbedingt Lösung sein muss, „scharfe“ Werte als Modelinput heranzuziehen und mit (sich ständig verändernden) Verteilungen zu arbeiten. Zentraler Verbesserungspunkt ist die Schätzung von erwarteter Rendite und Standardabweichung mit Fokus auf den Zinsmarkt anhand „unscharfer“, eine Bandbreite zulassender Funktionen („Membership-Funktionen“). Diese Funktionen dienen dazu, den Erwartungsnutzen des Anwenders zu maximieren. Hierzu ist keine Verteilungsannahme nötig.

E) Risiken bei der Korrelationsschätzung

Es wurde gezeigt, dass ein entscheidender Einflußfaktor zur Nutzung des Diversifikationseffektes die mathematische Kennzahl Korrelation ist.
Erst eine Korrelation ungleich eins ermöglicht eine Reduzierung des Risikos durch Streuung. Je niedriger der Korrelationskoeffizient, desto vorteilhafter für den Investor, desto mehr Risiko kann vernichtet werden.
Allerdings ist eine Korrelationsschätzung in hohem Maße fehleranfällig.[29]
Der Korrelationskoeffizient beschreibt die Zusammenhänge zweier Variablen korrekt, wenn die bivariate (gemeinsame) Wahrscheinlichkeitsverteilung ellipsenartig verläuft (Annahme der Normalverteilung). Diese bivariate Wahrscheinlichkeitsverteilung kann durch zwei Varianzen und einen Korrelationskoeffizienten vollständig beschrieben werden. Verwendet man nun Variablen, die den Normalitätsbedingungen nicht genüge tun (Schiefe und Kurtosis ungleich Null), so führt dies zu einer nicht elliptisch verlaufenden Verteilung, die durch Extremwerte in beiden Datensätzen herbeigeführt wurden. Zwei unterschiedliche Verteilungen implizieren verschiedene Abhängigkeitsstrukturen. Dennoch können beide auf einen identischen Korrelationskoeffizienten hinweisen und damit eine falsch Aussage machen. Des

[28] Ramaswamy, Srichander, „Portfolio Selection using Fuzzy Decision Theory“, 1998, Working Paper, Bank for International Settlements, Basel
[29] Kat, Harry M. (2002): The Danger of Using Correlation to Measure Dependence, Cass Business School, London, Working Paper

weiteren ist der Korrelationskoeffizient zwischen –1 und +1 normiert. Dies ist gültig für normalverteilte Variablen. Bei nicht normalverteilten Variablen können diese Grenzwerte dramatisch abweichen. Beispielsweise könnten die Begrenzung des Korrealtionskoeffizienten zweier nicht elliptisch verteilter Variablen bei –0,3 (anstatt –1) und +0,2 (anstatt +1) liegen. Es kann bei derartigen Verteilungen, die am Finanzmarkt regelmäßig auftreten, gefährlich sein, bei Vorliegen eines geringen absoluten Korrelationskoeffizienten gleichzeitig auf einen geringen Zusammenhang der betrachteten Variablen zu schließen.

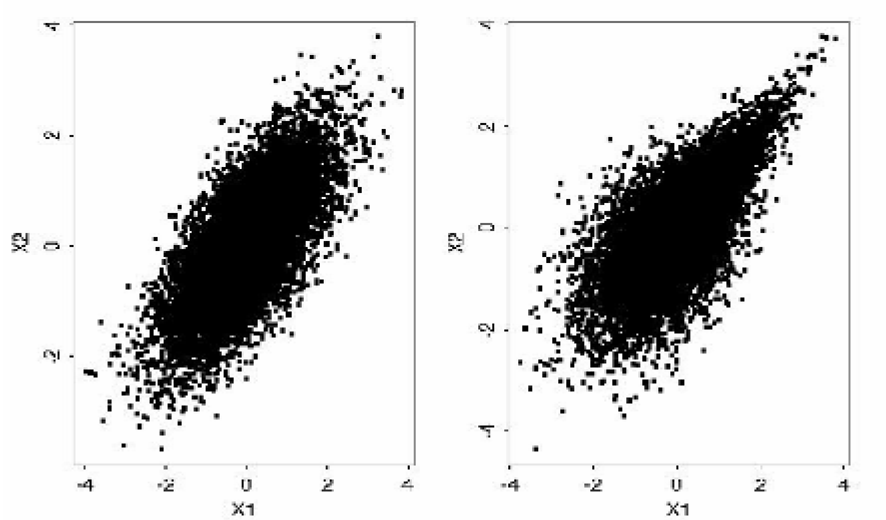

Abbildung 14: Graphik zeigt links eine elliptische (normalverteilte) und rechts eine nicht elliptische Verteilung mit gleichen Korrelationskoeffizienten [aus Kat, Harry M., „The Danger of using Correlation as a Measurement for Dependence“].

Ein Ansatz zur Lösung dieser Problematik ist die Copula-Methode[30], die bei Randverteilungen einsetzbar ist.

Auch finden aus diesem Grund alternative Methoden zur Messung von Zusammenhängen immer mehr Aufmerksamkeit in Theorie und Praxis, wie beispielsweise das Fehler-Korrektur-Modell (Konzept der Kointegration) von Engle/Granger, die 2003 den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften überreicht bekamen.

Beachtenswert ist zudem, dass es seit geraumer Zeit einen Markt zum Handel von Korrelationen gibt[31]: Am Optionsmarkt können (und werden) Korrelationen implizit gehandelt. Das dies möglich ist, kann durch Umstellung der Formel für die Portfoliovarianz gezeigt werden. Denn löst man nach der Korrelation auf so sind nur noch Portfoliogewichte und Varianzen (Quadrierte Standardabweichungen) variabel. Am

[30] „Einführung in die Statistik der Finanzmärkte“, Franke, Härdle, Hafner, Springer Verlag, Berlin, 2004, Seite 311 ff.

Optionsmarkt werden diese Varianzen in Form der impliziten Volatilität gehandelt und sind prinzipiell bekannt. Somit liegt die Portfoliovarianz in Form der impliziten Volaltilität der Optionen z.B. des DAX-Index vor, die Varianz der Einzelaktien kann aus den Optionen auf die Indexmitglieder gefunden werden. Berechnungen zeigen, dass sich historische und implizite Korrelation teilweise erheblich unterscheiden.

VI.) Praktische Anwendung der Portfolio-Selection-Theorie

Obwohl es nicht an Kritikpunkten mangelt ist es nötig, die Grundsätze der Portfolio-Selection-Theorie beim tatsächlichen Anlageprozeß im Alltag zu berücksichtigen.
Augrund des bewiesenen und existenten Diversifikationspotenzials sollte der versierte Anleger in der Lage sein, neben den eingangs vier erwähnten Fragen nun weitere Fragen zur Strukturierung des Depots beantworten können.
Denn der Diversifikationseffekt macht sich auf verschiedenen Ebenen bemerkbar und bietet dort Risikosenkungspotenziale.

1) *Welche Anlageformen sollten selektiert werden?*
   Vor allem in jüngster Vergangenheit machen hier so genannte Alternative Investments wie Hedge-Funds von sich reden. Hauptargument der Initiatoren ist die niedrige Korrelation derartiger Asset-Klassen zu den traditionellen Anlageformen wie Aktien oder Rentenpapiere.[32]
2) *In welchem Land sollte investiert werden?*
   Studien zeigen, dass es sinnvoll ist, auch innerhalb einer Asset-Klasse breit ausgerichtet zu sein. Auch durch internationale Streuung kann weiteres Risiko vernichtet werden.
3) *Welche Währung sollte selektiert werden?*
   Währungsrisiken können durch Streuung reduziert werden.
   Vor allem bei Anleihen stellt sich die Frage, in welcher Währung das Investment vorgenommen werden sollte. Denn neben den typischen Euro-Anleihen werden auch von der Bundesrepublik Deutschland Anleihen in Fremdwährungen angeboten.
4) *Welche Branchenschwerpunkte sollten gesetzt werden?*
   Bei Aktien kann Diversifikation durch die bereits angesprochene Branchenstreuung erreicht werden.

---

[31] „Explaining the Correlation Report“, Brask, David, JPMorgan London Securities, London, Research Note, 2002; „Die Korrelation bei Multi-Asset-Optionen“, Schubert, Alexander, Bankakademie Verlag, Frankfurt, 2004, Seite 185 ff.

5) *Welche einzelnen Wertpapiere sollten in dem bisher definierten Rahmen selektiert werden?*
   Erst an diesem Punkt wird das zu Beginn erläutertet „Rosinen-Picken“ wieder relevant.

Der Aufbau dieses durchaus realitätsnahen Entscheidungsprozesses, der den Grundsätzen der Portfolio-Theorie folgt, zeigt, welchen Stellenwert das systematische Abwägen von Rendite und Risiko einnehmen sollte.
Bereits kostenlose internetbasierte Informationsdienste wie Onvista.de oder CortalConsors.de, die via Java-Applet eine Markowitz-Optimierung einer beliebigen Depotstruktur ermöglichen, offerieren Instrumente, Analysetools und Kennzahlen auf semi-professionellem Niveau, die die strukturierte Planung des persönlichen Wertpapiervermögens unterstützen können.
Zudem ist es möglich, eine Portfoliooptimierung mit einem Tabellenkalkulationsprogramm wie Microsoft Excel selbst durchzuführen.[33]

VII.) Fazit

Es ist wichtig, die Gedanken Markowitz im Hinblick auf die Realisierung eines möglichst ausgewogenen und stabilen Vermögensaufbaus zu beachten.
Denn es wurde gezeigt, dass schon durch einfache Kombinationen von Wertpapieren erhebliche Vorteile in der Rendite-Risiko-Struktur eines Portfolios gewonnen werden können.
Die Vielfalt an Anlagealternativen bleibt es dem Investor jedoch nicht erspart, eine subjektive Vorselektion von Anlagemedien vorzunehmen. Es ist klar, dass das Modell von Markowitz deshalb in der Realität nicht eins zu eins, sondern nur mit Abstrichen übernommen werden kann. Unter Berücksichtigung und dem Wissen über der Existenz der Schwachstellen des Theorie kann der Anlageprozeß jedoch für jeden einzelnen erheblich verbessert werden. Denn Vermögen muss mit Weitblick aufgebaut werden.

Gerade im Hinblick auf die langfristig angelegte Altersvorsorge ist dieses sytematische und strukturierte Vorgehen eine rationale Folgerung, die umgesetzt werden sollte.

---

[32] „Interdependenzen von Hedge-Funds mit Aktien und Rentenmärkten. Korrelations- und Betaanalyse“, Krügel, Stephan, Seminararbeit am Lehrstuhl Prof. Mauerer, Universität Frankfurt, Sommersemester 2004; www.stephankruegel.de/hedgefunds.htm
[33] Der Autor hat das getan. Abruf der Datei ist möglich unter: www.stephankruegel.de

Literaturverzeichnis

Schubert, Alexander (2004): „Die Korrelation bei Multi-Asset-Optionen“, Bankakademie-Verlag, Frankfurt, 2004

Elton, Gruber, Brown, Goetzmann (2003): „Modern Portfolio Theory and Investment Analysis“, Wiley Finance, New York, 2003

Kat, Harry M. (2002): The Danger of Using Correlation to Measure Dependence, Cass Business School, London, Working Paper

Kat, Harry M. (2002): An Excursion Into the Statistical Properties of Hedge Fund Returns, Cass Business School, London,
Working Paper

Amin, Haurav S., Kat, Harry M. (2002): Stocks, Bonds and Hedge Funds: Not a free lunch!, Cass Business School, London

JP Morgan (2002): Investing Across Equities and Fixed Income, Dublin, 2002

Wilmott, Paul (2003): „Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance“, Wiley Finance, New York, 2003

Franke, Härdle, Hafner (2001): „Einführung in die Statistik der Finanzmärkte“, Springer Verlag, Berlin, 2004

Heidorn, Thomas (2000): „Finanzmathematik in der Bankpraxis – Vom Zins zur Option“, Gabler Verlag, Wiesbaden, 2000

Acampora, Ralph (2000): „Der vierte Mega Markt – Warum wir zehn goldene Jahre an der Börse erleben werden“, Campus Verlag, Frankfurt, 2000

Kiehling, Hartmut (2000): „Kursstürze am Aktienmarkt – Crashs in der Vergangenheit und was wir daraus lernen können“, dtv, München, 2000

Nicholas, Joseph G. (2000): Market Neutral Investing – Long/Short Hedge Fund Strategies, New York, Bloomberg Professional Library, 2000

Conrad, Christian A., Stahl, Markus (Hrsg.) (2000): Risikomanagement an den internationalen Finanzmärkten – Systemrisiken, Crashpotenzial, Anlagemanagement, Risikosteuerung, Stuttgart, Schaeffer-Poeschel, 2000

Dunbar, Nicholas (2000): Inventing Money- The story of Long-Term Capital Management and the legends behind it, New York, Wiley, 2001

Shefrin, Hersh (2000): Börsenerfolg mit Behavioural Finance – Invetsmentpsychologie für Profis, Stuttgart, Schaeffer-Poeschel, 2000

Sattler, Ralf (1999): „Aktienkursprognose: Professionelles Know How zur Vermögensanlage“, Verlag Vahlen, München, 1999

Krämer, Walter (1998): „Statistik verstehen“, Campus Verlag, Frankfurt, 1998

Gerke, Bank (1998): „Finanzierung“, Kohlhammer Verlag, Stuttgart, 1998

Cremers, Heinz (1998): Stochastik für Banker, Frankfurt, Bankakademie Verlag, 1998

Taleb, Nassim (1997): „Dynamic Hedging“, New York, Wiley Finance, 1997

Schwarze, Jochen (1997): „Grundlagen der Statistik“, nwb Verlag, Herne/Berlin, 1997

Schaeffer, Bernie (1996): „Millionen mit Optionen – Gezielter Vermögensaufbau mit Aktien- und Indexoptionen“, FinanzBuch Verlag, München, 1996

Bernstein, Peter L. (1996), „Against the Gods – The remarkable story of risk“, Wiley Finance, Chichester, 1998

Sautter, Jörg (1996): „Messung und Prognose von Volatilitäten am Beispiel des DAX-Index“, Bankakademie Verlag, Frankfurt, 1996

Uszczapowski, Igor (1995): „Optionen und Futures verstehen“, dtv, München, 1995

Vince, Ralph (1990): „Portfolio Management Formulas – Mathematical Trading Methods for the Futures, Options and Stock Markets“, Wiley Finance, New York, 1990

Radulesco, M., „Optimal Portfolio Selection: Mean-Variance versus Mean-VaR“, Working Paper, Institute of Mathematical Statistics and Applied Mathematics, Bukarest